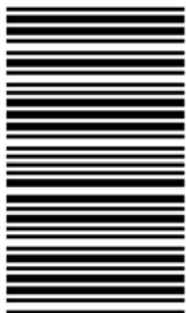


کد کنترل

167

A



167A

صبح جمعه

۱۴۰۲/۱۲/۰۴

«در زمینه مسائل علمی، باید دنبال قله بود.»

مقام معظم رهبری



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

## آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۴۰۳

ریاضی (کد ۱۲۰۸)

مدت زمان پاسخگویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۲۵	۱	۲۵
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۲و۱)، معادلات دیفرانسیل، مبنای علوم ریاضی، مبنای ماتریس‌ها و جبر خطی، مبنای آنالیز ریاضی، مبنای آنالیز عددی و مبنای احتمال)	۴۰	۲۶	۶۵
۳	آنالیز ریاضی	۲۰	۶۶	۸۵
۴	مبنای جبر و مبنای ترکیبات	۲۰	۸۶	۱۰۵
۵	جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل	۲۰	۱۰۶	۱۲۵
۶	احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی ۱	۲۰	۱۲۶	۱۴۵

این آزمون، نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

در صورت وجود هرگونه پرسش و ابهام با شماره ۹۰۹۹۰۷۵۳۰۷ تماس بگیرید.



irantahsil.org

تماس از طریق تلفن ثابت



\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالها و پایین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

## PART A: Vocabulary

**Directions:** Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- But at this point, it's pretty hard to hurt my ..... . I've heard it all, and I'm still here.
  - 1) characterization
  - 2) feelings
  - 3) sentimentality
  - 4) pain
- 2- Be sure your child wears sunscreen whenever she's ..... to the sun.
  - 1) demonstrated
  - 2) confronted
  - 3) invulnerable
  - 4) exposed
- 3- Many of these popular best-sellers will soon become dated and ....., and will eventually go out of print.
  - 1) irrelevant
  - 2) permanent
  - 3) fascinating
  - 4) paramount
- 4- The men who arrived in the ..... of criminals were actually undercover police officers.
  - 1) uniform
  - 2) job
  - 3) guise
  - 4) distance
- 5- It was more ..... to take my meals in bed, where all I had to do was push away my tray with its uneaten food and fall back upon my pillows.
  - 1) haphazard
  - 2) reckless
  - 3) convenient
  - 4) vigorous
- 6- His victory sparked a rare wave of ..... in his home country. Nicaraguans poured into the streets, honking car-horns and waving the national flag.
  - 1) serendipity
  - 2) tranquility
  - 3) aspersion
  - 4) euphoria
- 7- He liked the ease and glitter of the life, and the luster ..... on him by being a member of this group of rich and conspicuous people.
  - 1) conferred
  - 2) equivocated
  - 3) attained
  - 4) fabricated

## PART B: Cloze Test

**Directions:** Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Roman education had its first “primary schools” in the 3rd century BCE, but they were not compulsory ..... (8) entirely on tuition fees. There were no official schools in Rome, nor were there buildings used specifically for the purpose. Wealthy families ..... (9) private tutors to teach their children

at home, while less well-off children were taught in groups. Teaching conditions for teachers could differ greatly. Tutors who taught in a wealthy family did so in comfort and with facilities; ..... (10) been brought to Rome as slaves, and they may have been highly educated.

- 8- 1) which depending 2) and depended  
3) for depended 4) that depended
- 9- 1) have employed 2) employed  
3) were employed 4) employing
- 10- 1) some of these tutors could have 2) because of these tutors who have  
3) that some of them could have 4) some of they should have

### PART C: Reading Comprehension

**Directions:** Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

#### PASSAGE 1:

An ancient artifact called the Ishango bone (dating back to 20,000 years ago), discovered near the Nile River, consists of marks carved in three columns. Interpretations vary, with some proposing it as a tally or the earliest demonstration of prime numbers, while others suggest a six-month lunar calendar. Scholar Peter Rudman suggests that understanding prime numbers likely developed after the concept of division, dating back to around 10,000 BC, with a fuller comprehension emerging around 500 BC. The Ishango bone may have influenced later mathematical developments in Egypt, particularly in multiplication by 2, though this is debated.

Around 7,000 years ago, before ancient Egypt had its kings, people there were drawing pictures of shapes. Some folks think that in places like England and Scotland, big stone structures from about 5,000 years ago might have had shapes like circles, ellipses, and special number sets called Pythagorean triples. However, these claims are disputed, and the oldest undisputed mathematical documents come from the Babylonians (in the Middle East) and the Egyptians after they had their kings.

- 11- The word “emerging” in paragraph 1 is closest in meaning to .....  
1) appearing 2) theorizing 3) claiming 4) publishing
- 12- The word “it” in paragraph 1 refers to .....  
1) the Nile River  
2) an ancient artifact  
3) a six-month lunar calendar  
4) the earliest demonstration of prime numbers
- 13- According to paragraph 1, which of the following is true about the Ishango bone?  
1) It is believed to have been a kind of toy for children  
2) It was some sort of instrument associated with astrology  
3) The jury is still out about its exact function  
4) Scholars agree that it was used for the primary purpose of calculating the price of goods

- 14- All of the following names are mentioned in the passage EXCEPT .....
- 1) Mesopotamia      2) England      3) Egypt      4) Scotland
- 15- According to the passage, which of the following statements is true?
- 1) The earliest undisputed mathematical documents predate the Ishango bone.  
 2) The earliest undisputed mathematical documents are less than 7,000 years old.  
 3) Babylonians were the first people who entered the region now known as the Middle East.  
 4) The discovery of the Ishango bone particularly paved the way for the discovery of other objects in different regions of the world.

PASSAGE 2:

Pierre de Fermat was born in 1601 in Beaumont-de-Lomagne, France. He is believed to be of Gascogne origin. Fermat's father was a wealthy merchant and his mother's family was involved in the legal profession. There is little information about the early education of Pierre, but he is believed to have attended the College de Navarre in the city of Montauban. Fermat obtained a bachelor's in civil law from the University of Orleans in 1626. He was married and had five children.

Fermat was more of an amateur mathematician who explored the world of mathematics as a hobby. After studies, Pierre moved to Bordeaux where he started working on mathematical research seriously. Despite his interest in mathematics, he always maintained it as a hobby while continuing to work as an active lawyer.

Fermat was not even interested in publishing his work and used to send his work to famous mathematicians in France. It was his connection with Marin Mersenne that gave Pierre international recognition. During his lifetime, Fermat received very marginal recognition as a mathematician and it was his papers that he shared with others that kept his work alive. Otherwise, much of his work could have been lost.

Fermat made significant contributions to number theory, probability theory, analytic geometry and the early development of infinitesimal calculus. He ventured into the areas of mathematics which included pre-evolved calculus and trigonometry.

- 16- The word "his" in paragraph 3 refers to .....
- 1) Fermat    2) Mersenne  
 3) Fermat's father                                      4) Fermat's friend
- 17- The word "marginal" in paragraph 3 is closest in meaning to .....
- 1) outstanding      2) notorious      3) worldwide      4) negligible
- 18- What does paragraph 1 mainly discuss?
- 1) Life in the early 17th-century France  
 2) Fermat's achievements  
 3) France as fertile ground for the field of mathematics  
 4) Fermat's background
- 19- Fermat's life and legacy were one way or another associated with all of the following EXCEPT .....
- 1) law    2) civil management  
 3) probability theory    4) analytic geometry



20- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?

I. What did Fermat's wife do as a job?

II. What was the factor that resulted in Fermat's international recognition?

III. How many papers did Fermat write in his lifetime?

1) Only I

2) Only II

3) Only III

4) II and III

**PASSAGE 3:**

Are mathematical ideas invented or discovered? This question has been repeatedly posed by philosophers through the ages, and will probably be with us forever. We shall not be concerned with the answer: what matters is that by asking the question, we acknowledge the fact that mathematics has been leading a double life.

In the first of its lives, mathematics deals with facts like any other science. It is a fact that the altitudes of a triangle meet at a point; it is a fact that there are only seventeen kinds of symmetry in the plane; it is a fact that there are only five non-linear differential equations with fixed singularities; it is a fact that every finite group of odd order is solvable. The work of a mathematician consists in dealing with these facts in various ways. When mathematicians talk to each other, they tell the facts of mathematics. In their research work, mathematicians study the facts of mathematics with a taxonomic zeal similar to that of the botanist who studies the properties of some rare plant.

The facts of mathematics are as useful as the facts of any other science. No matter how abstruse they may appear at first, sooner or later they find their way back to practical applications. The facts of group theory, for example, may appear abstract and remote, but the practical applications of group theory have been numerous, and they have occurred in ways that no one could have anticipated. The facts of today's mathematics are the springboard for the science of tomorrow.

21- The word "abstruse" in paragraph 3 can be best replaced by .....

1) mundane

2) ceremonial

3) intricate

4) verified

22- According to paragraph 2, which of the following statements is true?

1) There are only five non-linear differential equations with fixed singularities.

2) The altitudes of a triangle do not necessarily meet at a point.

3) A few of the finite groups of odd order are not solvable.

4) There are more than twenty kinds of symmetry in the plane.

23- All of the following are mentioned in the passage EXCEPT .....

1) group theory

2) taxonomic zeal

3) physicists

4) the botanist

24- The passage probably continues, after paragraph 3, with which of the following topics?

1) A definitive answer to the question raised in the first paragraph

2) The theoretical origins of mathematics as a discipline

3) Introducing some of the famous mathematicians

4) The other aspect of "the double life" of mathematics

25- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?

I. Are mathematical ideas invented or discovered?

II. When did philosophers first realize the double nature of mathematics?

III. Are mathematical facts simply theoretical concepts?

1) Only I

2) Only II

3) Only III

4) II and III

دروس پایه (ریاضی عمومی (۲و۱)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۲۶- فرض کنید بردارهای  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \vec{a} \times \vec{b}$  یکه باشند و  $\vec{a} \neq \vec{b}$ . طول بردار  $\vec{a} - \vec{b}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳)  $\sqrt{2}$

(۴)  $\sqrt{3}$

۲۷- فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ . کدام مورد برای تابع  $f$  درست است؟

(۱)  $f'(0)$  وجود ندارد.

(۲) تابع  $f$  روی بازه‌های شامل صفر صعودی است.

(۳) تابع  $f$  روی بازه‌های شامل صفر نزولی است.

(۴) تابع  $f$  روی بازه‌های شامل صفر نه صعودی و نه نزولی است.

۲۸- فرض کنید  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  و به‌ازای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  تساوی  $f(x+y) = f(x) - f(y) + xy(x+y)$

برقرار باشد. مقدار  $\sum_{k=11}^{17} f'(k)$  کدام است؟

(۱) ۱۳۸۹

(۲) ۱۳۹۰

(۳) ۱۳۹۱

(۴) ۱۳۹۳

۲۹- مساحت ناحیه درون منحنی بسته  $(a, b > 0)$   $\begin{cases} x = a \cos t, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = b \sin t \cos^2 t \end{cases}$ ، کدام مضرب  $\pi ab$  است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۳۰- اگر  $\int_1^{\infty} \left( \frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$  همگرا به عدد  $A$  باشد، آنگاه مقدار  $nA$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} \ln \frac{7}{16} \quad (۱)$$

$$\frac{8}{9} \ln \frac{7}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{8} \ln \frac{7}{16} \quad (۳)$$

$$2 \ln \frac{7}{16} \quad (۴)$$

۳۱- برای سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$  کدام مورد درست است؟

(۱) جملات سری صعودی و سری همگرا است.

(۲) جملات سری نزولی و سری همگرا است.

(۳) جملات سری صعودی و سری واگرا است.

(۴) جملات سری نزولی و سری واگرا است.

۳۲- مجموعه‌های  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  و تابع  $f$  به شرح زیر مفروض‌اند. کدام مورد درست نیست؟ (  $\mathbb{Q}$  مجموعه اعداد گویا است.)

$$A_1 = \left\{ \left( x, \frac{1}{y} \right) : x \in \mathbb{Q} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \left( x, \frac{1}{y} \right) : x \notin \mathbb{Q} \right\}, \quad A_3 = \left\{ (x, 2) : x \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2y & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(۲)  $f$  در  $A_1^c$  ناپیوسته است.

(۱)  $f$  در  $A_3$  ناپیوسته است.

(۴)  $f$  در  $A_2$  پیوسته است.

(۳)  $f$  در  $A_1$  پیوسته است.

۳۳- اگر توابع دو متغیره  $f$  و  $g$  روی مجموعه همبند و باز  $S$  در صفحه مختصات به‌طور پیوسته دیفرانسیل پذیر باشند و  $C$  هر منحنی بسته ساده و پاره‌همواری در  $S$  باشد، کدام مورد درست نیست؟

$$\oint_C (f \nabla f) \cdot d\vec{r} = - \oint_C (g \nabla g) \cdot d\vec{r} \quad (۱)$$

$$\oint_C (f \nabla f) \cdot d\vec{r} = \oint_C (g \nabla g) \cdot d\vec{r} \quad (۲)$$

$$\oint_C (f \nabla g) \cdot d\vec{r} = - \oint_C (g \nabla f) \cdot d\vec{r} \quad (۳)$$

$$\oint_C (f \nabla g) \cdot d\vec{r} = \oint_C (g \nabla f) \cdot d\vec{r} \quad (۴)$$

۳۴- شار گذرنده بیرونی میدان برداری  $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + z^2, yz^2 + x^2, zx^2 + y^2)$  از سطح نیم کره  $S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{13\pi}{20}$

(۲)  $\frac{3\pi}{5}$

(۳)  $\frac{\pi}{5}$

(۴)  $\frac{3\pi}{20}$

۳۵- مقدار  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + (\min\{x, y\})^2} dx dy$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\pi}{2} - 2 \ln 2$

(۲)  $\ln 2$

(۳)  $\frac{\pi}{2} - \ln 2$

(۴)  $2 \ln 2$

۳۶- فرض کنید  $y = \ln x$  یک جواب معادله دیفرانسیل  $y' = e^{-y}x^2 + \frac{1}{x} - e^y$  باشد. اگر  $g(x) = \frac{2ce^{x^2} + 1}{2ce^{x^2} - 1}$

و  $y_c(x)$  جواب عمومی معادله باشند، آنگاه  $\exp(y_c(x))$  کدام است؟

(۱)  $\frac{g(x)}{x}$

(۲)  $\frac{x}{g(x)}$

(۳)  $\frac{1}{xg(x)}$

(۴)  $xg(x)$

۳۷- فرض کنید  $y_1(x) = \sin x$  و  $y_2(x)$  دو جواب مستقل خطی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

باشند. اگر رونسکین آنها در بازه  $(0, \frac{\pi}{4})$  برابر  $\sin^2(x)$  باشد، آنگاه  $y_2(x)$  کدام است؟

(۱)  $x \tan x$

(۲)  $x \cot x$

(۳)  $x \sin x$

(۴)  $x \cos x$



۳۸- حاصل  $\int x^{\lambda} J_0(x) dx$ ، کدام است؟

(راهنمایی:  $(J_{\lambda+1}(x) + J_{\lambda-1}(x)) = \frac{2\lambda}{x} J_{\lambda}(x)$ ,  $(x^{\lambda} J_{\lambda}(x))' = x^{\lambda} J_{\lambda-1}(x)$ )

(۱)  $x^{\lambda} (x J_1(x) - 2 J_2(x))$

(۲)  $x^{\lambda} J_1(x) + 2 x^{\lambda} J_2(x)$

(۳)  $x^{\lambda} J_1(x) - x J_2(x)$

(۴)  $x J_1(x) - 2 J_2(x)$

۳۹- فرض کنید  $f(t) = t^n e^{-t}$ . تبدیل لاپلاس  $g(t) = e^t \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{\Gamma(n)(s-1)^n}{s^{n+1}}$

(۲)  $\frac{n!(s-1)^n}{s^{n+1}}$

(۳)  $\frac{(n+1)!s^n}{(s-1)^{n+1}}$

(۴)  $\frac{\Gamma(n)s^n}{(s-1)^{n+1}}$

۴۰- جواب  $y = y(x)$  از حل معادله انتگرال  $\int_0^1 \frac{y(xt)}{\sqrt{1-t}} dt = \sqrt{x}$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{\pi x}$

(۲)  $\frac{2}{\pi \sqrt{x}}$

(۳)  $\frac{1}{\pi} \sqrt{x}$

(۴)  $\frac{2}{\pi} x$

۴۱- با فرض اینکه  $x, y \in \mathbb{R}$ ، عمل‌های دوتایی \* و 0 را با ضابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$x * y = x + y + xy$

$x \circ y = x + y - xy$

کدام مورد درست است؟

(۱) هر دو عمل شرکت‌پذیر هستند.

(۲) فقط عمل \* شرکت‌پذیر است.

(۳) فقط عمل 0 شرکت‌پذیر است.

(۴) هیچ‌کدام شرکت‌پذیر نیستند.

۴۲- فرض کنید  $A \subseteq \mathbb{R}$  و  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع باشد. فرمول منطقی گزاره زیر کدام است؟  
«تابع  $f$  در هیچ نقطه‌ای از  $A$  حد ندارد»

در موردهای زیر  $\varepsilon$  و  $\delta$  مقید به اعداد مثبت هستند،  $x, a \in A$  و  $b \in \mathbb{R}$

$$(1) \quad \forall a \forall b \exists \varepsilon \forall \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| \geq \varepsilon)$$

$$(2) \quad \forall a \forall b \forall \delta \exists \varepsilon \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon)$$

$$(3) \quad \forall a \forall b \exists \varepsilon \forall \delta \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon)$$

$$(4) \quad \forall a \forall b \exists \varepsilon \exists \delta \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon)$$

۴۳- فرض کنید  $(X, \leq)$  مجموعه کلاً مرتب باشد و

$$\forall x, y \in X: (x, y) = \{z \in X: x \leq z, x \neq z, z \leq y, z \neq y\}$$

رابطه  $\sim$  روی  $X$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall a, b \in X: (a \sim b \Leftrightarrow \exists x, y \in X: a, b \in (x, y))$$

رابطه  $\sim$  روی  $X$  کدام خاصیت را دارد؟

(۲) تثلیث

(۱) پادتقارنی

(۴) تعدی (ترایی)

(۳) انعکاسی (بازتابی)

۴۴- فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد. کدام مورد با یک‌به‌یک بودن تابع  $f$  معادل نیست؟

(۱) تابع  $g: Y \rightarrow X$  وجود دارد که  $f \circ g = I$ .

$$(2) \quad \forall A, B \subseteq X: f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$(3) \quad \forall A, B \subseteq X: f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

$$(4) \quad \forall A \subseteq X: f^{-1}(f(A)) = A$$

۴۵- فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای شمارا و  $B$  مجموعه‌ای با توان پیوستار باشد، یعنی  $B \cong \mathbb{R}$ . کدام مورد نادرست است؟

(۱)  $B^A$  توان پیوستار دارد.

(۲)  $A^B$  توان پیوستار دارد.

(۳)  $A^A$  توان پیوستار دارد.

(۴)  $(A \times B)^A$  توان پیوستار دارد.

۴۶- فرض کنید  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه  $T(a, b) = (a + 2b, -2a + b)$  باشد. در این صورت  $T^f$  برابر کدام است؟

$$(1) \quad 12T - 5I$$

$$(2) \quad -12T + 5I$$

$$(3) \quad 5T - 12I$$

$$(4) \quad 5T + 12I$$

۴۷- کلیه مقادیر  $k$  را پیدا کنید که ماتریس  $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$  وارون پذیر باشد؟

$$(1) \quad k \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$(2) \quad k \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

$$(3) \quad k \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(4) \quad k \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$$

۴۸- فرض کنید  $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  با ضابطه  $T(f)(x) = 2f'(x) + \int_0^x 3f(t) dt$  باشد که در آن  $P_n(\mathbb{R})$

فضای برداری چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر  $n$  روی میدان  $\mathbb{R}$  است. کدام مورد درست است؟

(۱)  $\dim \ker T = 2$  و  $\text{rank}(T) = 2$ .

(۲)  $\ker T = \{0\}$ ، پوشا نیست و  $\text{rank}(T) = 3$ .

(۳)  $T$  یک‌به‌یک و پوشا است و  $\text{rank}(T) = 3$ .

(۴)  $T$  یک‌به‌یک و پوشا است و  $\text{rank}(T) = 4$ .

۴۹- فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{C})$  و  $A^3 = A$ . اگر  $A$  دارای ۳ مقدار ویژه متمایز باشد، آن‌گاه رتبه  $A$  برابر است با:

(۱)  $\text{tr}(A^2)$

(۲)  $\text{tr}(A)$

(۳)  $\text{tr}(A^3)$

(۴) صفر

۵۰- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ . در این صورت  $A$  به‌عنوان یک تبدیل خطی در  $\mathbb{R}^5$ :

(۱) مثلثی‌شونده و قطری‌شدنی است.

(۲) مثلثی‌شونده است ولی قطری‌شدنی نیست.

(۳) مثلثی‌شونده نیست و قطری‌شدنی نیست.

(۴) مثلثی‌شونده نیست ولی قطری‌شدنی است.

۵۱- به ازای ثابت  $a$ ، مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax) - a \tan(x)}{\sin(ax) - a \sin(x)}$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲)  $a$

(۳)  $-2$

(۴)  $-a$

۵۲- فرض کنید  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد و  $g$  بر  $[0, 1]$  با ضابطه  $g(x) = \sup\{f(t) : 0 \leq t \leq x\}$

تعریف شود. کدام مورد درست است؟

(۱)  $g$  بر  $[0, 1]$  پیوسته است.

(۲)  $g$  بر  $(0, 1)$  پیوسته است، ولی ممکن است در  $0$  و  $1$  پیوسته نباشد.

(۳) برای  $r \in \mathbb{R}$  مجموعه  $\{x : g(x) < r\}$  باز است، ولی  $g$  لزوماً پیوسته نیست.

(۴) برای  $r \in \mathbb{R}$  مجموعه  $\{x : g(x) > r\}$  باز است، ولی  $g$  لزوماً پیوسته نیست.

۵۳- فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته باشد به طوری که برای  $C > 0$  و هر  $x, y \in \mathbb{R}$  نامساوی زیر برقرار است:

$$|f(x) - f(y)| \geq C|x - y|$$

کدام مورد نادرست است؟

(۱)  $f$  اکیداً یکنواست.

(۲)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک همسان‌ریختی است.

(۳)  $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت است.

(۴) برد  $f$  در  $\mathbb{R}$  بسته است، ولی  $f$  لزوماً پوشا نیست.

۵۴- فرض کنید تابع حقیقی  $f$  بر  $(0, 2)$  پیوسته و بر  $\{1\} \setminus (0, 2)$  مشتق پذیر باشد. اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = a$ ، آنگاه

کدام مورد درست است؟

- (۱) مشتق  $f$  در نقطه  $x = 1$ ، لزوماً موجود نیست.  
 (۲) مشتق  $f$  در نقطه  $x = 1$  موجود و برابر  $a$  است.  
 (۳) اگر  $f'$  یکنوا باشد، مشتق  $f$  در نقطه  $x = 1$  موجود و برابر با  $a$  است و شرط یکنوایی ضروری است.  
 (۴) مشتق  $f$  در نقطه  $x = 1$  موجود است و اگر تابع  $f'$  پیوسته باشد، آنگاه  $f'(1) = a$  و شرط پیوستگی ضروری است.

۵۵- فرض کنید برای هر  $n$ ،  $a_n > 0$  و سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا است. کدام سری، واگرا است؟

- (۱) برای  $p > 1$ ،  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$   
 (۲)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$   
 (۳)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$   
 (۴)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$

۵۶- فرض کنید  $f(x) = -e^{-2x} + e^x$ . کدام عبارت تقریب بهتری از  $f(x)$  را به ازای مقادیر  $x$  نزدیک صفر، نتیجه می‌دهد؟

- (۱)  $x$   
 (۲)  $3x$   
 (۳)  $2 - 3x$   
 (۴)  $e^x(1 - e^{-3x})$
- ۵۷- برای به دست آوردن ریشه حقیقی  $\alpha = 4$  از معادله  $2^x = x^2$ ، از الگوریتم روش نابجایی در بازه  $[3, 5]$  استفاده می‌کنیم. اگر  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله حاصل از روش مورد نظر باشد، آنگاه مقدار  $x_1$  کدام است؟

- (۱)  $3/25$   
 (۲)  $3/5$   
 (۳)  $4/25$   
 (۴)  $4/5$

۵۸- اگر  $P(x)$  چند جمله‌ای درون‌یاب تابع  $f(x) = 3x - 2^x$  در سه نقطه  $x = 0, 1, 2$  باشد، آنگاه تقریب ریشه معادله  $3x = 2^x$  توسط ریشه معادله  $P(x) = 0$  در بازه  $[0, 2]$ ، کدام است؟ ( $\sqrt{17} = 4.123$ )

- (۱)  $0.52315$   
 (۲)  $0.46272$   
 (۳)  $0.43844$   
 (۴)  $0.39841$

۵۹- برای محاسبه یک مقدار تقریبی از  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  از فرمول  $f(\alpha) + f(-\alpha)$  چنان استفاده می‌کنیم که مقدار تقریبی و دقیق انتگرال برای توابع چند جمله‌ای با حداکثر درجه ممکن یکسان باشند. اگر تابع  $f$  در بازه  $[-1, 1]$  به اندازه کافی

مشتق پذیر با مشتقات پیوسته باشد، آنگاه مقدار  $\int_{-1}^1 f(x) dx - (f(\alpha) + f(-\alpha))$ ، کدام است؟ ( $c \in (-1, 1)$ )

- (۱)  $\frac{1}{6} f^{(5)}(c)$   
 (۲)  $\frac{1}{6} f^{(4)}(c)$   
 (۳)  $\frac{1}{24} f^{(3)}(c)$   
 (۴)  $\frac{1}{4} f''(c)$

۶۰- در یک تابع جدولی به صورت  $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^n$  با نقاط متساوی الفاصله، مقادیر  $\Delta^2 f_i = -2$  و  $f_{i+2} = 29$ ،  $f_{i+1} = f_i + f_{i+2}$  مفروض اند. اگر  $\Delta^2 f_i^2 = 5$ ، آنگاه میانگین مقادیر  $f_i$ ،  $f_{i+1}$  و  $f_{i+2}$  کدام است؟

$$(f_i^2 = f^2(x_i))$$

- ۱ (۱)      ۲ (۲)  
۳ (۳)      ۴ (۴)

۶۱- برای داده های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  با میانگین  $\bar{x}$ ، براساس ویژگی های میانگین، کدام مورد درست است؟

(۱) مقدار تابع  $f(a) = \sum_{i=1}^n |x_i - a|$  وقتی ماکزیمم می شود که  $a = \bar{x}$  باشد.

(۲) مقدار تابع  $f(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$  وقتی مینیمم می شود که  $a = \bar{x}$  باشد.

(۳) مقدار تابع  $f(a) = \sum_{i=1}^n |x_i - a|$  وقتی مینیمم می شود که  $a = \bar{x}$  باشد.

(۴) اگر میانگین یکتا نباشد، تابع  $f(a) = \sum_{i=1}^n |x_i - a|$  دارای مینیمم یکتا نیست.

۶۲- میانگین و انحراف معیار درجه خلوص ماده شیمیایی A به ترتیب ۷۵ و ۵ درصد و برای ماده شیمیایی B میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۸۵ و ۱۰ درصد است. در مورد درجه خلوص این دو ماده، چه اظهار نظری می توان نمود؟

(۱) ماده A، خالص تر است.

(۲) ماده B، خالص تر است.

(۳) دو ماده از نظر درجه خلوص، به طور متوسط یکسان هستند.

(۴) نمی توان درجه خلوص دو ماده را مقایسه نمود.

۶۳- یک عکس خانوادگی را در نظر بگیرید که در آن، قرار است مادربزرگ در وسط یک ردیف از اعضای خانواده باشد. برای یک خانواده ۷ نفری (شامل مادربزرگ)، چند روش مختلف برای قرار گرفتن اعضای خانواده در این عکس وجود دارد؟

(۱) ۳۶۰

(۲) ۷۲۰

(۳) ۲۵۲۰

(۴) ۵۰۴۰

۶۴- براساس یک نظرسنجی، پاسخ‌دهندگان دارای حداقل یکی از بیمه‌های خدمات درمانی یا بیمه درآمد از کارافتادگی هستند. اگر  $x$  درصد از پاسخ‌دهندگان دارای بیمه خدماتی درمانی،  $y$  درصد دارای بیمه درآمد از کارافتادگی و  $z$  درصد فقط دارای بیمه خدمات درمانی باشند، احتمال اینکه پاسخ‌دهنده‌ای که به‌طور تصادفی انتخاب‌شده، فقط دارای بیمه از کارافتادگی باشد، کدام است؟

$$(۱) \frac{y - x - 2z}{100}$$

$$(۲) \frac{y - x + 2z}{100}$$

$$(۳) \frac{y - x - z}{100}$$

$$(۴) \frac{y - x + z}{100}$$

۶۵- طبق یافته‌های ژنتیکی به‌دست آمده، دوقلوها را می‌توان به دو گروه تقسیم‌بندی نمود: هموزیگوت یا هتروزیگوت. در گروه هموزیگوت، دو جنین تشکیل خواهد شد که ژن‌های کاملاً مشابهی با یکدیگر دارند و در نتیجه، همیشه هم‌جنس هستند (هر دو پسر یا هر دو دختر). اگر در یک جامعه از دوقلوها، درصد دوقلوهای دختر  $\frac{1}{4}$  باشد، درصد دوقلوهای هموزیگوت کدام است؟

$$(۱) \text{ صفر}$$

$$(۲) \frac{1}{2}$$

$$(۳) \frac{1}{3}$$

$$(۴) \frac{1}{4}$$

آنالیز ریاضی:

۶۶- فرض کنید  $X$  یک فضای متریک،  $A \subseteq X$ ،  $A^\circ$  مجموعه نقاط درونی  $A$ ،  $A'$  مجموعه نقاط حدی (انباشتگی)  $A$ ،  $\bar{A}$  بستار  $A$  و  $\partial A$  مرز  $A$  باشد. کدام مورد نادرست است؟

$$(۱) \partial A = A \cap A'$$

$$(۲) \partial A = \bar{A} \setminus A^\circ \text{ و } \bar{A} = A^\circ \cup \partial A$$

(۳) اگر  $G$  مجموعه‌ای باز و زیرمجموعه  $A$  باشد، آنگاه  $G \subseteq A^\circ$ .

(۴) اگر  $F$  مجموعه‌ای بسته و شامل  $A$  باشد، آنگاه  $\bar{A} \subseteq F$ .

۶۷- فرض کنید  $A$  زیرمجموعه فضای متریک  $X$  باشد، کدام مورد درست است؟

(۱) اگر درون و مرز  $A$  همبند باشد، آنگاه  $A$  همبند است.

(۲) اگر  $A$  و درون  $A$  همبند باشد، آنگاه مرز  $A$  همبند است.

(۳) اگر  $A$  و مرز  $A$  همبند باشد، آنگاه درون  $A$  همبند است.

(۴) اگر  $A$  همبند باشد، آنگاه هر زیرمجموعه سره و ناتهی  $A$  دارای مرز ناتهی است.

۶۸- فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک فشرده و  $A$  زیرمجموعه ناتهی  $X$  است. کدام گزاره نادرست است؟

(۱) مجموعه  $\{x \in X : d(x, A) \geq 1\}$  فشرده است.

(۲) عددی مثبت مانند  $M$  وجود دارد، به طوری که برای هر  $x \in X$ ،  $d(x, A) \leq M$ .

(۳) عضوی مانند  $x \in X \setminus A$  وجود دارد، به طوری که برای هر  $y \in X \setminus A$ ،  $d(x, A) \leq d(y, A)$ .

(۴) عضوی مانند  $y \in X$  وجود دارد که برای هر  $x \in X$ ،  $d(x, A) \leq d(y, A)$ .

۶۹- کدام مورد، گزاره زیر را به نحو درست، تکمیل می کند؟

«هیچ متری مانند  $d$  روی  $Q$  (مجموعه اعداد گویا) وجود ندارد، به طوری که فضای متریک  $(Q, d)$

..... باشد.»

(۱) فشرده (۲) همبند

(۳) کراندار (۴) دارای گوی باز دو عضوی

۷۰- فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک و  $\{x_n\}$  دنباله‌ای در  $X$  باشد. کدام مورد، با کوشی بودن دنباله  $\{x_n\}$

معادل است؟

(۱) مجموعه  $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{x_n : n \geq k\}}$  حداکثر یک عضو دارد.

(۲) به ازای هر  $k \in \mathbb{N}$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{k+n}) = 0$ .

(۳) مجموعه حدود زیردنباله‌ای  $\{x_n\}$  حداکثر یک عضو دارد.

(۴) به ازای هر دو زیردنباله مانند  $\{x_{i_n}\}$  و  $\{x_{j_n}\}$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{i_n}, x_{j_n}) = 0$ .

۷۱- فرض کنید  $X$  یک فضای متریک شمارا باشد و  $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . به ازای هر  $m \in \mathbb{N}$  قرار می‌دهیم

$Y_m = \{x_n : n \geq m\}$ . اگر  $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{diam}(Y_m) = 0$ ، آنگاه کدام مورد درباره فضای متریک  $X$  درست است؟

(۱) کامل است. (۲) کلاً کراندار است.

(۳) هر نقطه از  $X$ ، نقطه تنهاست. (۴) هر زیر مجموعه  $X$  بسته است.

۷۲- جای خالی را چنان پر کنید که گزاره زیر درست باشد.

«فرض کنید  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک باشند. تابع  $f : X \rightarrow Y$  یکنواخت پیوسته است، اگر و تنها اگر بر هر

زیرمجموعه ..... از  $X$  یکنواخت پیوسته باشد.»

(۱) شمارا (۲) فشرده (۳) کامل (۴) همبند

۷۳- فرض کنید  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک باشند و تابع  $f : X \rightarrow Y$  دارای خاصیت زیر باشد:

«دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  همگرا است، اگر و تنها اگر دنباله  $\{f(x_n)\}$  در  $Y$  همگرا باشد.»

کدام مورد نادرست است؟

(۱) تابع  $f$  پیوسته است.

(۲) تابع  $f$  یک به یک است.

(۳) برای هر مجموعه  $A$  در  $X$ ،  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ .

(۴) دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  کوشی است، اگر و فقط اگر دنباله  $\{f(x_n)\}$  در  $Y$  کوشی باشد.

۷۴- فرض کنید  $A$  زیرمجموعه‌ای از فضای متریک  $(X, d)$  باشد. شرط  $*$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:  
 $\forall x \in X \exists b_1, b_2 \in A \forall a \in A (d(x, b_1) \leq d(x, a) \leq d(x, b_2))$

کدام مورد درست است؟

- (۱) مجموعه  $A$  در شرط  $*$  صدق می‌کند، اگر و تنها اگر  $A$  فشرده باشد.
  - (۲) مجموعه  $A$  در شرط  $*$  صدق می‌کند، اگر و تنها اگر  $A$  بسته و کراندار باشد.
  - (۳) اگر مجموعه  $A$  در شرط  $*$  صدق کند، آنگاه  $A$  بسته و کراندار است ولی عکس آن درست نیست.
  - (۴) هر زیرمجموعه  $X$  در شرط  $*$  صدق می‌کند، اگر و تنها اگر  $X$  کراندار و هر زیرمجموعه آن بسته باشد.
- ۷۵- فرض کنید  $\{x_n\}$  و دنباله‌هایی کوشی در فضای متریک  $(X, d)$  باشند. کدام مورد درست است؟

- (۱) دنباله  $\{d(x_n, y_n)\}$  بدون هیچ شرطی همواره همگراست.
  - (۲) اگر  $\{d(x_n, y_n)\}$  کراندار باشد، همگراست، ولی ممکن است دنباله  $\{d(x_n, y_n)\}$  کراندار نباشد.
  - (۳) اگر  $(X, d)$  کامل باشد، دنباله  $\{d(x_n, y_n)\}$  همگراست، در غیراین صورت ممکن است واگرا باشد.
  - (۴) اگر  $\{x_n\}$  و  $\{y_n\}$  همگرا باشند، آنگاه دنباله  $\{d(x_n, y_n)\}$  همگراست، در غیراین صورت ممکن است واگرا باشد.
- ۷۶- فرض کنید هر دنباله  $\{x_n\}$  در فضای متریک  $X$  با خاصیت  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, X \setminus \{x_n\}) = 0$ ، دارای زیر دنباله همگرا است. کدام مورد درست است؟

همگرا است. کدام مورد درست است؟

- (۱) فضای متریک  $X$  فشرده است.
  - (۲) مجموعه نقاط حدی  $X$  فشرده است.
  - (۳) هر تابع حقیقی روی  $X$  پیوسته است.
  - (۴) یک تابع حقیقی پیوسته روی  $X$  وجود دارد که یکنواخت پیوسته نیست.
- ۷۷- دنباله  $\{f_n\}$  بر  $\mathbb{R}$  با ضابطه  $f_n(x) = \frac{x^2}{1 + (2 \sin x)^{2n}}$  و تابع  $f$  بر  $\mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  تعریف می‌شود. مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$ ، کدام است؟

$$(1) \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{6} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(2) \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(3) \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(۴) مجموعه تهی

۷۸- تابع  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \chi_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}(x)$  تعریف شده است، که  $\chi$  تابع مشخصه است.

کدام مورد درباره تابع  $f$  نادرست است؟

- (۱) انتگرال پذیر ریمان است.
- (۲) صعودی است.
- (۳) در نقطه صفر پیوسته است.
- (۴) مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$  شمارا است.



$$-۷۹ \quad \text{توابع } \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], f_n: \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, \text{ را با ضابطه } f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \\ 2-nx & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases} \text{ در نظر بگیرید. درباره}$$

دنباله  $\{f_n\}$ ، کدام مورد درست است؟

(۱) همگرایی یکنواخت به صفر است.

(۲) در هیچ نقطه از مجموعه  $\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\}$  به صفر میل نمی‌کند، ولی خارج این مجموعه، نقطه‌وار به صفر میل می‌کند.

(۳) در هیچ نقطه از مجموعه  $\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k} : k \in \mathbb{N}\}$  به صفر میل نمی‌کند، ولی خارج این مجموعه، نقطه‌وار به صفر میل می‌کند.

(۴) نقطه‌وار به صفر میل می‌کند ولی همگرایی یکنواخت نیست.

-۸۰ توابع  $f_n, n \in \mathbb{N}$ ، بر بازه  $[0, \frac{\pi}{4}]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_{n+1}(x) = \sin f_n(x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

درباره دنباله  $\{f_n\}$  کدام مورد درست است؟

(۱) همگرایی نقطه‌وار نیست.

(۲) همگرایی یکنواخت است.

(۳) همگرایی نقطه‌وار است ولی هیچ زیردنباله‌ای از آن یکنواخت همگرا نیست.

(۴) همگرایی یکنواخت نیست ولی زیردنباله‌ای دارد که همگرایی یکنواخت است.

-۸۱ برای هر  $n \in \mathbb{N}$  تابع  $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$  را بر  $\mathbb{R}$  در نظر بگیرید. کدام مورد نادرست است؟

(۱) دنباله  $\{f'_n\}$  بر  $[1, \infty)$  همگرایی یکنواخت است.

(۲) دنباله  $\{f_n\}$  بر  $[1, \infty)$  همگرایی یکنواخت است.

(۳) دنباله  $\{f_n\}$  بر  $(0, \infty)$  همگرایی نقطه‌ای است ولی همگرایی یکنواخت نیست.

(۴) دنباله  $\{f'_n\}$  بر  $(0, \infty)$  همگرایی نقطه‌ای است ولی همگرایی یکنواخت نیست.

-۸۲ فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع مشتق‌پذیر و یکنواخت همگرا بر  $\mathbb{R}$  است. کدام دنباله یکنواخت همگرا است؟

(۱)  $\{f_n^2\}$

(۲)  $\{\log(1+f_n^2)\}$

(۳)  $\{f'_n\}$

(۴)  $\{F_n\}$  که  $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$

۸۳- دنباله توابع  $\{f_n\}$  را به صورت در نظر می‌گیریم. کدام مورد درست است؟

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; f_n(t) = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^t |\sin(nx)| dx$$

(۱) هم‌پیوسته است ولی زیردنباله یکنواخت همگرا ندارد.

(۲) هم‌پیوسته نیست و هیچ زیردنباله یکنواخت همگرا ندارد.

(۳) هم‌پیوسته نیست ولی زیردنباله‌ای دارد که یکنواخت همگراست.

(۴) هم‌پیوسته است و زیردنباله‌ای دارد که یکنواخت همگراست.

۸۴- فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع پیوسته بر  $\mathbb{R}$  باشد که به طور نقطه‌وار به تابع  $g$  همگرا است. از کدام شرط پیوستگی تابع  $g$  بر  $\mathbb{R}$  نتیجه می‌شود؟

(۱) برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و هر  $x \in \mathbb{R}$   $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ .

(۲) هر  $f_n$  خارج از یک بازه فشرده متحد با صفر است.

(۳) هر  $f_n$  مشتق‌پذیر است و برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و هر  $x \in \mathbb{R}$   $|f'_n(x)| \leq 2$ .

(۴) دنباله  $\{f_n\}$  بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت کراندار است.

۸۵- شعاع همگرایی سری توانی  $\sum_{n=2}^{\infty} (1-n)^n x^{n!}$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲)  $e$

(۳)  $\frac{1}{e}$

(۴)  $\infty$

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات:

۸۶- فرض کنید  $R$  یک حلقه جابه‌جایی،  $a \in R$  و  $R[x]$  حلقه چندجمله‌ای‌های آن باشد. هم‌ریختی

$$\varphi_a : R[x] \rightarrow R \text{ با ضابطه } \varphi_a(f(x)) = f(a) \text{ را در نظر بگیرید. در این صورت:}$$

(۱)  $\varphi_a$  پوشاست و  $\text{Im } \varphi_a$  یک ایده‌آل اصلی است.

(۲)  $\varphi_a$  پوشاست و  $\text{Ker } \varphi_a$  یک ایده‌آل اصلی است.

(۳)  $\varphi_a$  یک‌به‌یک است و  $\text{Ker } \varphi_a$  یک ایده‌آل اصلی است.

(۴)  $\varphi_a$  یک‌به‌یک است و  $\text{Im } \varphi_a$  یک ایده‌آل اصلی است.

۸۷- فرض کنید  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$  و  $H = \langle (0, 4), (1, 2) \rangle$ . در این صورت کدام مورد درست است؟

$$(1) \frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ و } H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$(2) \frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_4 \text{ و } H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$(3) \frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ و } H = \mathbb{Z}_4$$

$$(4) \frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_4 \text{ و } H = \mathbb{Z}_4$$

۸۸- چند عضو مرتبه ۱۲ در  $S_7$  (گروه تقارن‌های روی ۷ حرف) وجود دارد؟

- (۱) ۱۲  
(۲) ۳۲۰  
(۳) ۴۲۰  
(۴) ۶۳۰

۸۹- فرض کنید  $N$  یک زیرگروه نرمال با شاخص ۴ از گروه  $G$  باشد، در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- (۱) اگر  $\frac{G}{N}$  دوری نباشد، در این صورت  $G$  دارای سه زیرگروه سره مانند  $A$ ،  $B$  و  $C$  است به طوری که  $G = A \cup B \cup C$ .  
(۲) فقط یک زیرگروه ماکسیمال از  $G$  وجود دارد که شامل  $N$  است.  
(۳) اگر  $N$  دوری باشد، آنگاه  $G$  آبلی است.  
(۴) اگر  $\frac{G}{N}$  دوری باشد، آنگاه  $G$  آبلی است.

۹۰- فرض کنید  $G$  گروهی از مرتبه ۸۴ باشد به طوری که یک هم‌بختی پوشا از  $G$  به  $S_3$  وجود دارد. در این صورت کدام مرتبه حتماً یک زیرگروه نرمال برای  $G$  وجود دارد؟

- (۱) ۴۲  
(۲) ۲۸  
(۳) ۱۲  
(۴) ۶

۹۱- فرض کنید  $G$  یک گروه ناآبلی متناهی و  $H$  یک گروه آبلی متناهی باشد که به ترتیب توسط مجموعه‌های  $X$  و  $Y$  تولید می‌شوند. اگر تمام عناصر  $X$  و  $Y$  از مرتبه ۲ باشند، کدام مورد درست است؟

- (۱) مرتبه  $G$  و  $H$  لزوماً توانی از ۲ نیستند.  
(۲) مرتبه  $G$  و  $H$  هر دو توانی از ۲ هستند.  
(۳) مرتبه  $G$  توانی از ۲ است ولی مرتبه  $H$  لزوماً توانی از ۲ نیست.  
(۴) مرتبه  $G$  لزوماً توانی از ۲ نیست ولی مرتبه  $H$  توانی از ۲ است.

۹۲- فرض کنید  $G$  یک گروه و  $H < G$  و  $H \neq 1$  باشد، در این صورت ..... .

- (۱) اگر  $G - H$  متناهی باشد، آنگاه  $G$  متناهی است.  
(۲) اگر  $H$  متناهی باشد، آنگاه  $G$  نیز متناهی است.  
(۳) اگر مرتبه تمام عناصر  $H$  متناهی باشد، آنگاه  $G$  متناهی است.  
(۴) اگر  $H$  نامتناهی باشد، آنگاه  $G - H$  متناهی است.

۹۳- یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار را موعی می‌نامند، هرگاه فقط یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. کدام یک از حلقه‌های زیر موضعی نیست؟

- (۱)  $\mathbb{Z}_{16}$   
(۲)  $\mathbb{Z}_{17}$   
(۳)  $\mathbb{Z}_{18}$   
(۴)  $\mathbb{Z}_{19}$

۹۴- تعداد عناصر وارون‌پذیر کدام حلقه برابر با ۴ نیست؟

- (۱)  $\mathbb{Z}_5$   
(۲)  $\mathbb{Z}_{10}$   
(۳)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   
(۴)  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

۹۵- تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$  چندتا است؟ (عنصر صفر را هم به‌عنوان یک مقسوم‌علیه صفر در نظر بگیرید.)

(۱) ۱۶

(۲) ۲۴

(۳) ۲۶

(۴) ۳۲

۹۶- کوچک‌ترین مقدار  $m$  چقدر است به‌طوری‌که در هر زیرمجموعه  $m$  عضوی از  $\{1, 2, \dots, 60\}$ ، چهار عدد متمایز  $a, b, c, d$  موجود باشد، به‌طوری‌که  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  مضرب ۳ باشد؟

(۱) ۱۶

(۲) ۲۱

(۳) ۳۱

(۴) ۴۱

۹۷- چند تابع پوشا و صعودی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 20\}$  به مجموعه  $\{1, 2, \dots, 10\}$  می‌توان نوشت؟ (دامنه را برابر  $\{1, 2, \dots, 20\}$  در نظر بگیرید.)

(۱)  $\binom{19}{9}$

(۲)  $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{20}$

(۳)  $\binom{29}{9}$

(۴)  $\binom{29}{9}$

(۳)  $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{20}{k} (20-k)^{10}$

۹۸- می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰۰ را در ۱۰ دسته متمایز ۱۰ تایی قرار دهیم، به‌طوری‌که در هر دسته، ۵ عدد زوج و ۵ عدد فرد وجود داشته باشد. به چند طریق، این افراز امکان‌پذیر است؟ (ترتیب اعضا در هر دسته مهم نیست.)

(۲)  $\frac{50!^2}{10!^{10}}$

(۴)  $\frac{100!}{5!^{20}}$

(۳)  $\frac{50!^2}{5!^{20}}$

(۱)  $\frac{50!^2}{5!^{20}}$

۹۹- اگر برای هر  $1 \leq i \leq 9$  داشته باشیم:  $f(i+1) - f(i) \geq 10$ ، چند تابع مانند  $f$  از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 100\}$  به مجموعه  $\{1, 2, \dots, 1000\}$  می‌توان تعریف کرد؟

(۲)  $\binom{11}{10}$

(۴)  $\binom{20}{10}$

(۱) ۱

(۳)  $\binom{19}{10}$

۱۰۰- در کدام‌یک از دنباله‌های بازگشتی زیر، جمله عمومی دنباله به فرم  $a_n = a \cdot 2^n + b \cdot 2^{2n} + c \cdot 2^{3n}$  خواهد بود؟ (فرض کنید سه جمله اول هر دنباله، مقادیری معلوم هستند و برای  $n \geq 4$ ، رابطه بازگشتی داده شده است.)

(۱)  $a_n = 14a_{n-1} + 56a_{n-2} + 64a_{n-3}$

(۲)  $a_n = 14a_{n-1} - 56a_{n-2} + 64a_{n-3}$

(۳)  $a_n = -14a_{n-1} - 56a_{n-2} + 64a_{n-3}$

(۴)  $a_n = -14a_{n-1} + 56a_{n-2} - 64a_{n-3}$

۱۰۱- اگر  $f(i) \neq i$  باشد، برای هر  $i$  از دامنه، چند تابع دوسویی از  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  به مجموعه  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$  وجود دارد؟

- (۱) ۲۴۰  
(۲) ۲۹۲  
(۳) ۳۶۲  
(۴) ۴۴۰

۱۰۲- گراف  $G$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

هر زیرمجموعه ۳ عضوی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 10\}$  را یک رأس در نظر بگیرید. دو رأس  $A$  و  $B$  مجاورند، هرگاه کوچک‌ترین عضو  $A$  با بزرگ‌ترین عضو  $B$  برابر باشد. ماکزیمم درجه و مینیمم درجه در گراف  $G$ ، به ترتیب، کدام است؟

- (۱)  $(28, 10)$  (۲)  $(28, 0)$  (۳)  $(21, 10)$  (۴)  $(21, 0)$

۱۰۳- گراف  $G$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

هر زیرمجموعه ۳ عضوی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 10\}$  را یک رأس است و دو رأس  $A$  و  $B$  مجاور هستند اگر تفاضل متقارن  $A$  و  $B$  دو عضوی باشد ( $|A \Delta B| = 2$ ). چند گزاره از گزاره‌های زیر، درباره  $G$ ، نا درست است؟  
-  $G$ ، همبند است.  
- درجه هر رأس، برابر است با ۲۱.  
-  $G$ ، دوبخشی است.  
-  $G$ ، خوشه ۸ تایی دارد.

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

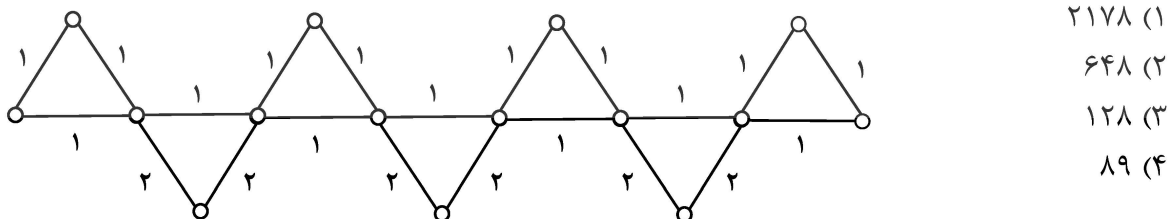
۱۰۴- گراف  $G$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود. این گراف چند یال دارد؟

$$V(G) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 9, 1 \leq y \leq 6\}$$

$$E(G) = \{ \{A, B\} \mid A, B \in V(G), \overline{AB} = \sqrt{13} \}$$

- (۱) ۹۶  
(۲) ۹۰  
(۳) ۴۸  
(۴) ۴۵

۱۰۵- تعداد کوچک‌ترین درخت‌های فراگیر در گراف وزن دار زیر، کدام است؟



جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل:

۱۰۶- کدام مورد برای ماتریس‌های متعامد حقیقی  $A$  و  $B$ ، لزوماً برقرار نیست؟

- (۱) ستون‌های  $A$  مجموعه‌ای از بردارهای یکه متعامد تشکیل می‌دهند.  
(۲)  $AB$  متعامد است.

(۳)  $\det(A) = 1$

(۴)  $A^{-1} = A^T$

۱۰۷- فرض کنید  $u \in \mathbb{R}^{2n}$  و  $u \neq 0$  و  $H = I - \frac{2uu^T}{u^T u}$ . کدام مورد برای ماتریس  $H$  نادرست است؟

(۱)  $H$ ، یک ماتریس مثبت معین متقارن است.

(۲)  $H$ ، یک ماتریس متعامد است.

(۳)  $\|Hx\|_2 = \|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^{2n}$

(۴)  $\det(H) = -1$

۱۰۸- با تغییر مناسب سطرهای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ ، برای حل دستگاه معادلات خطی  $Ax = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

از الگوریتم تکرار گاوس - سایدل و بردار آغازین  $x^{(0)} = (2, a, b)^T$  چنان استفاده می‌کنیم که دنباله حاصل

به جواب دستگاه معادلات همگرا شود. اگر بردار حاصل از تکرار اول به صورت  $x^{(1)} = (0, \frac{5}{3}, -\frac{11}{15})^T$  باشد،

آنگاه مقدار  $b - a$  کدام است؟

(۲) صفر

(۱)  $-\frac{20}{9}$

(۴) ۲

(۳)  $\frac{20}{9}$

۱۰۹- در حل دستگاه معادلات خطی  $Ax = b$  با فرض  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \beta & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  و  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، از روش حذفی گاوس

استفاده می‌کنیم. مقدار  $\beta$  در کدام بازه تغییر کند تا نیاز به محورگیری جزئی نباشد؟

(۲)  $[-1, 0]$

(۱)  $[0, 1]$

(۴)  $[-1, 0] \cup [1, \infty)$

(۳)  $[-1, 1]$

۱۱۰- ماتریس  $R$  در تجزیه QR ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ، کدام است؟

(۲)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

(۱)  $\begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

(۴)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

(۳)  $\begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

۱۱۱- فرض کنید  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  و  $P$  ماتریس متناظر با عملگر تصویر متعامد روی فضای برد  $A$  باشد. بردار  $P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

کدام است؟

(۱)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (۲)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  (۳)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (۴)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

۱۱۲- اگر  $\lambda = 4$  یک مقدار ویژه ماتریس  $A$  و  $x = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  بردار ویژه متناظر با آن باشد، آنگاه بردار  $A^5 x$  کدام

است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} -0/004395 \\ -0/003906 \\ 0/000976 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} -4608 \\ -4096 \\ 1024 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -4/5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} -18 \\ -16 \\ 4 \end{bmatrix}$

۱۱۳- دستگاه  $Ax \leq b$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد که  $\text{rank}(A) = m$ . با استاندارد  $x \geq 0$

کردن دستگاه فوق، کدام مورد در خصوص تعداد جواب‌های پایه‌ای شدنی دستگاه جدید، درست است؟

(۱) حداقل  $\binom{n}{m}$  است. (۲) حداقل  $\binom{m+n}{m}$  است.  
(۳) حداکثر  $\binom{n}{m}$  است. (۴) حداکثر  $\binom{m+n}{m}$  است.

۱۱۴- دستگاه استاندارد (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0 \quad (P)$$

که در آن،  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  و  $a_1, \dots, a_n$  ستون‌های ماتریس  $A$  هستند. اگر  $\bar{x}$  یک جواب پایه‌ای شدنی

برای دستگاه (P) با پایه  $B = [a_1, a_3, a_4]$  باشد و  $y_j = B^{-1} a_j$ ، آنگاه  $y_3$  کدام است؟

(۱)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (۲)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (۳)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (۴)  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

۱۱۵- در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی مینیمم‌سازی که ناحیه شدنی آن شامل  $x = 0$  باشد، اگر یک متغیر مانند  $x_k$  را حذف کنیم (به عبارتی دیگر، قید  $x_k = 0$  را به مسئله اضافه کنیم)، آنگاه ناحیه شدنی مسئله جدید ..... ناحیه شدنی مسئله اولیه و مقدار بهینه مسئله جدید ..... مقدار بهینه مسئله اولیه است.

- (۱) زیرمجموعه - کوچک‌تر یا مساوی  
 (۲) شامل - بزرگ‌تر یا مساوی  
 (۳) زیرمجموعه - بزرگ‌تر یا مساوی  
 (۴) شامل - کوچک‌تر یا مساوی
- ۱۱۶- مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } c^T x$$

s. t.

$$Ax + Is = b \quad (P)$$

$$x \geq 0, s \geq 0$$

فرض کنید  $b \geq 0$  و جدول متناظر با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل این مسئله به صورت زیر است. مقدار  $c_1$  (ضریب  $x_1$  در تابع هدف) کدام است؟

	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	RHS	
Z	۱	۸	۰	۰	-۲	۰		-۸ (۱)
Z								-۲ (۲)
$s_1$	۰	۷	۰	۱	$-\frac{5}{3}$	۰	۵	۲ (۳)
$s_1$								۸ (۴)
$x_2$	۰	-۱	۱	۰	$\frac{1}{3}$	۰	۱	
$s_3$	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۴	

۱۱۷- جدول زیر، متناظر با یک مسئله مینیمم‌سازی است. کدام مورد، صحیح است؟

	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	RHS
Z	۱	۰	۰	۰	-۱	۰
$s_1$	۰	۰	۱	۱	۱	۰
$x_1$	۰	۱	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰

- (۱) مسئله، بی‌کران است.  
 (۲) مجموعه جواب‌های بهینه، بی‌کران است.  
 (۳) مسئله، جواب بهینه منحصر به فرد تباهیده (تبهگن) دارد.  
 (۴) مسئله، دو جواب بهینه رأسی دارد که یکی از آنها تباهیده (تبهگن) است.
- ۱۱۸- فرض کنید  $u \geq 0$  و مسئله (P) به صورت زیر باشد.

$$\text{Min } c^T x$$

s. t.

$$Ax = 0 \quad (P)$$

$$0 \leq x \leq u$$

اگر دوگان این مسئله را با (D) نمایش دهیم، آنگاه کدام مورد صحیح است؟

- (۱) (D) می‌تواند بی‌کران باشد.  
 (۲) (P) و (D) هر دو شدنی هستند.  
 (۳) (P) شدنی و (D) می‌تواند نشدنی باشد.  
 (۴) (P) شدنی و (D) می‌تواند نشدنی باشد.



۱۱۹- مسئله برنامه‌ریزی خطی (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\text{Min } c^T x$$

s. t.

$$Ax = 0 \quad (P)$$

$$x \geq 0$$

فرض کنید دوگان (P) را با (D) نشان می‌دهیم و (P) دارای جواب بهینه باشد. اگر بردار ضرایب هزینه از c به c' تغییر کند، آنگاه مسئله جدید اولیه را با (P') و دوگان آن را با (D') نمایش می‌دهیم. در این صورت، کدام مورد صحیح است؟

(۱) (D') نشدنی است.

(۲) بی‌کران است.

(۳) جواب بهینه دارد.

(۴) جواب بهینه دارد یا نشدنی است.

۱۲۰- فرض کنید جدول زیر، متناظر با یکی از تکرارهای مرحله اول در روش دومرحله‌ای (دوفازی) است که در آن

$s_1$  و  $s_2$  متغیرهای کمکی و  $R_1$  و  $R_2$  متغیرهای مصنوعی قیود اول و دوم مسئله هستند. حاصل  $\alpha + \beta + \gamma$

کدام است؟

	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$R_1$	$R_2$	RHS
Z	۱	$\alpha$	۰	-۱	۲	۰	-۳	$\beta$
$R_1$	۰	۵	۰	-۱	$\gamma$	۱	-۲	۱
$x_2$	۰	-۳	۱	۰	-۱	۰	۱	۳

۸ (۱)

۶ (۲)

۵ (۳)

۴ (۴) صفر

۱۲۱- فرض کنید  $y(x)$  یک جواب معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه  $y(0) = 1$ ،  $y' = \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x}$  باشد،

کدام یک از نامساوی‌های زیر برای هر  $x$  برقرار است؟

(۱)  $\sin x < y(x) < 2$

(۲)  $-2 < y(x) < \sin x$

(۳)  $\sin x < y(x) < +1$

(۴)  $-1 < y(x) < \sin x$

۱۲۲- فرض کنید  $p$  و  $q$  دو تابع پیوسته بر بازه  $I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  باشند. کدام مجموعه می‌تواند، مجموعه‌ی اساسی

جواب معادله دیفرانسیل  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  را در بازه  $I$  تشکیل دهد؟

(۱)  $\{x^2, x\}$

(۲)  $\{\sin x, 1\}$

(۳)  $\{x^2, \tan^{-1} x\}$

(۴)  $\{x^2 | x|, x^3\}$

۱۲۳- به ازای کدام مقدار  $y_0$ ، هرگاه  $t \rightarrow +\infty$ ، جواب مسئله با مقدار اولیه  $y(0) = y_0$ ،  $y' - y = 1 + 3 \sin t$ ،

کراندار باقی می‌ماند؟

(۱)  $-\frac{5}{2}$

(۲) صفر

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴)  $\frac{5}{2}$

۱۲۴- کدام عبارت زیر برای مسئله اولیه  $y(0) = 0$ ,  $y' = y^{\frac{1}{4}}$  در بازه  $[0, 1]$  درست است؟  
 (۱) مسئله تعداد نامتناهی جواب دارد.

(۲) مسئله فقط دو جواب  $y = 0$  و  $y = \left(-\frac{3}{4}x\right)^{\frac{4}{3}}$  دارد.

(۳) مسئله یک جواب یکتای  $y = 0$  دارد.

(۴) مسئله جواب ندارد.

۱۲۵- تحت چه شرایطی از هر نقطه واقع در درون مستطیل منتهای  $R$ ، یک منحنی منحصر به فرد از جواب معادله

دیفرانسیل  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  می‌گذرد؟

(۱)  $f(x, y)$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  هر دو کراندار باشند.

(۲)  $f(x, y)$  کراندار و  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  پیوسته باشد.

(۳)  $f(x, y)$  پیوسته و  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  کراندار باشد.

(۴)  $f(x, y)$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  هر دو پیوسته باشند.

احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی:

۱۲۶- طول بدن ماهی‌های یک دریاچه، متغیر تصادفی  $X$  (برحسب سانتی‌متر) با تابع چگالی  $5 < x < 25$

$f(x) = \frac{1}{40}$ ، ماهی‌گیری ۳ ماهی صید کرده است. احتمال این که طول بزرگ‌ترین آنها از ۱۰ سانتی‌متر

کمتر باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{64}$

(۲)  $\frac{1}{4}$

(۳)  $\frac{1}{8}$

(۴)  $\frac{1}{16}$

۱۲۷- فرض کنید  $X \sim N(2, 4)$ ،  $Y \sim N(0, 9)$  و  $W \sim N(15, 16)$  باشند. کدام مورد، درست است؟

(۱)  $P(Y \leq -2) \leq P(W \leq 12) \leq P(X \leq 1)$

(۲)  $P(W \leq 12) \leq P(Y \leq -2) \leq P(X \leq 1)$

(۳)  $P(X \leq 1) \leq P(W \leq 12) \leq P(Y \leq -2)$

(۴)  $P(X \leq 1) \leq P(Y \leq -2) \leq P(W \leq 12)$

۱۲۸- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی پواسون با تابع توزیع تجمعی  $F$  باشد، به طوری که  $F(2) = 2/6 F(1)$ . در این صورت،  $E(X)$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۳/۲  
(۳) ۴  
(۴) ۴/۲

۱۲۹- اگر  $X$  دارای تابع چگالی احتمال  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ،  $x \in \mathbb{R}$  و  $F(x)$  تابع توزیع آن باشند، واریانس متغیر

تصادفی  $Y = (1 - F(X))^2$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{12}{45}$   
(۲)  $\frac{5}{45}$   
(۳)  $\frac{4}{45}$

(۴) وجود ندارد.

۱۳۰- فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی مستقل هندسی با تابع جرم احتمال زیر باشند:

$$P(X = x) = p(1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

مقدار  $P\{X = Y \text{ و } \text{Min}(X, Y) = 1\}$  کدام است؟

- (۱)  $p(1-p)$   
(۲)  $p^2(1-p)$   
(۳)  $p(1-p)^2$   
(۴)  $p^2(1-p)^2$

۱۳۱- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند که  $X \sim U(0, 1)$  و  $Y \sim U(0, \beta)$ . اگر  $P(X > Y) = \frac{1}{4}$

باشد، مقدار  $\beta$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲)  $\frac{3}{2}$   
(۳) ۲  
(۴) ۴

۱۳۲- فرض کنید  $X$  دارای توزیع پواسون با میانگین ۲ و  $Z$  دارای توزیع نرمال استاندارد، دو متغیر تصادفی مستقل

از یکدیگر باشند. در مورد کران  $P(Z^2 > \frac{X+10}{X+Z^2})$ ، چه می توان گفت؟

- (۱) حداقل  $\frac{3}{10}$   
(۲) حداکثر  $\frac{3}{10}$   
(۳) حداقل  $\frac{7}{10}$   
(۴) حداکثر  $\frac{7}{10}$

۱۳۳- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی بواسون مستقل با میانگین برابر با  $\lambda$  باشند. مقدار احتمال  $P(X=0 | X+Y=2)$ ، کدام است؟

$$\frac{e^{-\lambda}}{2} \quad (1)$$

$$2e^{-\lambda} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

۱۳۴- برای دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  داریم

$$M_{X+2Y}(t) = (1-2t)^{-1}, \quad M_{2X-Y}(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

که در آن،  $M_Z(t)$  نشان‌دهنده تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی  $Z$  است. با فرض این‌که  $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$ ، در این صورت  $\text{Cov}(X, Y)$  کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

۱۳۵- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دارای تابع چگالی توأم  $f(x, y) = e^{-2x-\frac{y}{2}}$ ،  $x > 0, y > 0$  باشد. ضریب همبستگی بین  $X+Y$  و  $X-Y$ ، کدام است؟

$$-\frac{16}{17} \quad (1)$$

$$-\frac{15}{17} \quad (2)$$

$$-\frac{14}{17} \quad (3)$$

$$-\frac{13}{17} \quad (4)$$

۱۳۶- فرض کنید  $X_1, X_2, X_3$  یک نمونه تصادفی سه‌تایی از توزیعی با تابع مولد گشتاور  $M(t) = \frac{e^{-t} + e^t}{2}$

باشد. واریانس  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ ، چقدر است؟

(۱)  $\frac{1}{6}$

(۲)  $\frac{1}{4}$

(۳)  $\frac{1}{3}$

(۴)  $\frac{5}{6}$

۱۳۷- در یک نمونه تصادفی ۵ تایی از توزیع گاما با پارامترهای ۱ و ۱، احتمال این‌که کوچک‌ترین مشاهده از میانه توزیع بزرگ‌تر باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{7}{32}$

(۲)  $\frac{5}{32}$

(۳)  $\frac{3}{32}$

(۴)  $\frac{1}{32}$

۱۳۸- اگر  $X_1, X_2, X_3$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع  $N(\frac{1}{2}, 2)$  باشند،  $E\left(\frac{X_1^2 + 2X_2^2 - 3X_3^2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}\right)$

کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴)  $\frac{1}{2}$

۱۳۹- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع توزیع پیوسته  $F$  باشد. همچنین فرض کنید  $Y$  یک متغیر تصادفی دیگر از همان توزیع  $F$  و مستقل از  $X_i$ ها باشد. حاصل  $P(Y > X_{(1)})$  کدام است؟  $X_{(1)}$  کوچک‌ترین آماره مرتب یک نمونه تصادفی به حجم  $n$  است.

(۲)  $1 - \frac{1}{n}$

(۱)  $1 - \left(\frac{1}{n}\right)^n$

(۴)  $1 - \frac{1}{n+1}$

(۳)  $1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

۱۴۰- فرض کنید  $Y_1, Y_2, \dots$  متغیرهای مستقل و هم توزیع با تابع احتمال  $P(Y=1)=p$  و  $P(Y=-2)=q$

باشند که در آن  $p+q=1$ . اگر  $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  و  $X_0 = 0$ ، در این صورت  $P\left(\frac{X_{n+2}}{1+X_n} \leq 1\right)$  کدام است؟

(۱)  $pq$

(۲)  $q(1+p)$

(۳)  $p(1+q)$

(۴)  $(1-pq)$

۱۴۱- یک زنجیر مارکوف  $\{X_t, t=0, 1, \dots\}$  با فضای حالت  $\{0, 1, 2\}$  دارای ماتریس احتمال انتقال زیر است:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اگر  $P(X_0=0) = P(X_0=1) = \frac{1}{2}$ ، مقدار  $E(X_2)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{4}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{7}{9}$

(۴)  $\frac{5}{6}$

۱۴۲- فرض کنید اتوبوس‌ها براساس فرایند پواسون با نرخ ۲ اتوبوس در ساعت به یک ایستگاه می‌رسند. مسافران نیز براساس فرایند پواسون مستقل از یکدیگر با نرخ ۱۰ نفر در ساعت وارد ایستگاه می‌شوند. به محض رسیدن اتوبوس، همه مسافران در همان لحظه سوار می‌شوند و اتوبوس حرکت می‌کند. پس از رفتن اتوبوس قبلی واریانس تعداد مسافران حاضر در ایستگاه تا رسیدن اتوبوس بعدی، کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۲۰

(۴) ۳۰

۱۴۳- مشتریان یک خودپرداز بانک طی یک فرایند پواسون با نرخ ۳ مشتری در هر ۵ دقیقه به آن مراجعه می‌کنند. احتمال اینکه زمان بین ورود مشتری اول و دوم حداقل ۲ دقیقه باشد، کدام است؟

(۱)  $e^{-0.6}$

(۲)  $e^{-0.1}$

(۳)  $e^{-1/2}$

(۴)  $e^{-1/5}$

۱۴۴- فرض کنید  $\{N(t) : t \geq 0\}$  یک فرایند پواسون با نرخ ۲ باشد. مقدار  $E(N(2)|N(3) = 6)$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۱۲

۱۴۵- در یک فرایند شاخه‌ای فرض کنید  $X_n$  تعداد اعضای نسل  $n$ ام و  $\mu$  متوسط تعداد نوزادان فرد  $n$ ام باشند و

قرار دهید  $X_0 = 1, EX_n^2 = 1$ . در این صورت  $E(X_m X_n)$  برای  $m \leq n$  کدام است؟

(۱)  $\mu^{n-m}$ (۲)  $\mu^{n-2m}$ (۳)  $\mu^{2n-m}$ (۴)  $\mu^{2(n-m)}$ 

