



بسمه تعالی
شانزدهمین المپیاد غیر متمرکز علمی دانشجویی کشور
معاونت آموزشی
دفتر استعدادهای درخشان (اردیبهشت ۹۰)

دانشگاه مازندران

آزمون آنالیز ریاضی

۱- فرض کنید $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ اکیدا نزولی و پیوسته است طوری که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. ثابت کنید
$$\int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx$$
 واگرا است.

۲- فرض کنید a, b دو عدد حقیقی باشند $(a < b)$ و f, g دو تابع محدود و انتگرالپذیر بر $[a, b]$ که در شرط زیر صدق کنند:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 = \left[\int_a^b f^2(x) dx \right] \left[\int_a^b g^2(x) dx \right] \neq 0$$

ثابت کنید عدد حقیقی مانند k وجود دارد بطوریکه $\int_a^b [f(x) - k g(x)]^2 dx = 0$.

۳- فرض کنید $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر است به طوری که $x > 1$; $f'(x) = \frac{x^2 - (f(x))^2}{x^2((f(x))^2 + 1)}$.

ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

۴- گیرید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق پیوسته و $\int_0^1 f(x) dx = 0$. ثابت کنید برای هر $\alpha \in (0, 1)$ داریم:

$$\left| \int_0^{\alpha} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{8} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| ; 0 \leq x \leq 1$$

موفق باشید



بسمه تعالی
شانزدهمین المپیاد غیر متمرکز علمی دانشجویی کشور
معاونت آموزشی
دفتر استعدادهای درخشان (اردیبهشت ۹۰)

دانشگاه مازندران

آزمون آنالیز عددی

۱ - نشان دهید که در روش تکرار ساده داریم:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{L}{1-L} |x_{n+1} - x_n| \quad ; \quad n \geq 0$$

که در آن، L عددی مثبت است که: $|g'(x)| \leq L < 1 \quad \forall a \leq x \leq b$

۲ - فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متساوی الفاصله از $[0, 1]$ باشند. اگر $P_n(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ در نقاط x_0 تا x_n باشد، آیا به ازای هر $x \in [0, 1]$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$ ؟ (ادعای خود را ثابت کنید).

۳ - فرض کنید α ریشه تکراری مرتبه m از $f(x) = 0$ باشد اگر

$$h(x) = f(x + f(x)) - f(x)$$

الف) ثابت کنید α ریشه مرتبه $2m - 1$ از $h(x) = 0$ می باشد

ب) به کمک الف روشی ارائه کنید که بدون کمک مشتق f بتوان دنباله یافت که به α همگرا باشد و مرتبه همگرایی آن خطی نباشد. آیا این روش از نظر عددی ناپایدار است؟

۴ - برای قاعده نقطه میانی نشان دهید:

$$\int_0^h f(x) dx - h f\left(\frac{h}{2}\right) = \int_0^h K(t) f''(t) dt$$

که در آن،

$$K(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t \leq \frac{h}{2} \\ \frac{1}{2}(h-t)^2 & \frac{h}{2} \leq t \leq h \end{cases}$$

موفق باشید



بسمه تعالی
شانزدهمین المپیاد غیر متمرکز علمی دانشجویی کشور
معاونت آموزشی
دفتر استعداد های درخشان (اردیبهشت ۹۰)

دانشگاه مازندران

آزمون جبر

۱- فرض کنید M یک زیر گروه ماکسیمال از گروه G باشد، یعنی زیرگروهی مانند H وجود ندارد که $M < H < G$. ثابت کنید اگر M در G نرمال باشد، آنگاه اندیس $[G : M]$ متناهی و یک عدد اول است.

۲- گیرید G گروهی از مرتبه p^2 (p عددی اول) باشد. ثابت کنید G دوری است یا با گروه $Z_p \times Z_p$ یکرخت است.

۳- فرض کنید R یک حلقه و J ایده آلی از آن و همچنین I ایده آلی از J باشد. ثابت کنید اگر I یکدار باشد، آنگاه I ایده آل R است.

۴- اگر R حلقه جابجایی با بیش از یک عنصر باشد و برای هر عنصر غیر صفر a از R داشته باشیم $aR = R$ ، نشان دهید R یک میدان است.

موفق باشید



آزمون تحقیق در عملیات

۱. نشان دهید که چگونه با حل مساله زیر می توان یک بردار x با این شرط که $Ax=0$ بدست می آید به طوری که دارای بیشترین درآیه مثبت غیر صفر است.

$$\max \sum_{i=1}^n y_i$$

$$A(z+y)=0$$

$$y_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$z, y \geq 0$$

۲. دو مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min c^t x$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$\max p^t b$$

$$p^t A \leq c^t$$

$$p \geq 0$$

فرض کنید که حداقل یکی از مسایل بالا دارای جواب شدنی باشد. نشان دهید که فضای جواب حداقل یکی از مسایل بالا بی کران است.

۳. اگر مسایل

$$P_1 : \min cx$$

$$\text{s.t. } Ax=b$$

$$x \geq 0$$

$$P_2 : \min cx$$

$$\text{s.t. } Ax=b'$$

$$x \geq 0$$

دارای جواب بهینه باشند، ثابت کنید چنانچه P_1 دارای جواب بهینه متناهی باشد، آنگاه جواب بهینه P_2 نیز متناهی است.



آزمون تحقیق در عملیات

۴. در مساله بهینه سازی خطی

$$\max C^T x$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

A یک ماتریس $m \times n$ و دارای مرتبه m است. X جواب بهینه و پایه متناظر این جواب B در دست است. بردار m تایی d برداری ثابت است و $\lambda > 0$. شرایط لازم و شرایط کافی را بدست آورید به طوری که B برای کلیه مقادیر λ یک پایه بهینه برای مساله

$$\max C^T x$$

$$\text{s.t. } Ax - \lambda d = b$$

$$x \geq 0$$

باشد.

موفق باشید



بسمه تعالی
شانزدهمین المپیاد غیر متمرکز علمی دانشجویی کشور
معاونت آموزشی
دفتر استعدادهای درخشان (اردیبهشت ۹۰)

دانشگاه مازندران

آزمون جبرخطی

۱ - فرض کنید $A_{(n-1) \times n}$ ماتریسی با درایه هایی از مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ باشد به طوریکه مجموع اعداد هر سطر آن صفر گردد. نشان دهید که

$$|AA^t| = nk^2 \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

۲ - فرض کنید $A_{n \times n}$ یک ماتریس با درایه های حقیقی و λ یک مقدار ویژه A باشد. ثابت کنید $\frac{\det A}{\lambda}$ یک مقدار ویژه برای $adj A$ است. بعلاوه اگر A قطری شدنی باشد، آنگاه $adj A$ نیز قطری شدنی است.

۳ - گیرید $W = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, a_1 = a_3 = a_5 = \dots\}$. نشان دهید :

الف) W یک زیر فضای $\mathbb{R}^n$ است.

ب) بعد زیر فضای W را پیدا کرده و یک پایه برای W بیابید.

۴ - اگر $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی با $\dim V < \infty$ باشد، نشان دهید که احکام زیر معادلند:

(۱) هر بردار غیر صفر V یک بردار ویژه T است.

(۲) T با هر عملگر خطی خودتوان (S خودتوان است اگر $S^2 = S$) روی V جابجا شود.

موفق باشید