## معادله‌ی درجه‌ی دوم

- حل معادله‌ی درجه‌ی دوم و مسائل کاربردی
- تعداد و علامت ریشه‌های معادله

هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ را یک معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌نامیم. در سال اول شما با روش‌های حل معادله آشنا شدید، کاربردی‌ترین آن‌ها روش تجزیه و فاکتورگیری، روش مربع کامل و در نهایت فرمول کلی حل معادله است.

■ **مثال:** معادلات زیر را حل کنید:

(a) $x^2+2x=0$ (روش فاکتورگیری)

(b) $x^2+5x+6=0$ (روش تجزیه)

(c) $x^2-2x-11=0$ (روش مربع کامل)

◀ **حل:**

(a) $x(x+2)=0 \rightarrow x=0$ یا $x=-2$

(b) $(x\quad)(x\quad)=0 \xrightarrow[\text{و مجموع آن‌ها ۵ باشد}]{\text{دو عدد که ضرب آن‌ها ۶}} (x+3)(x+2)=0 \rightarrow x=-3$ یا $x=-2$

(c) $x^2-2x-11=0 \rightarrow (x^2-2x)-11=0 \rightarrow ((x-1)^2-1)-11=0 \rightarrow (x-1)^2=12 \rightarrow x-1=\pm\sqrt{12}$
$\rightarrow x=1\pm\sqrt{12}$

فرمول کلی حل معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$، $(a\neq 0)$ به‌صورت روبه‌روست: $x'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x''=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

که در آن $\Delta=b^2-4ac$، مبین (دلتای) معادله نامیده می‌شود. اگر $\Delta\geq 0$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد و اگر $\Delta<0$، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

### تعداد و علامت ریشه‌های معادله

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ با توجه به شرایط $\Delta$ و $-\dfrac{b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $\dfrac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها) می‌توان در مورد تعداد و علامت ریشه‌ها نظر داد.

(۱) $\Delta>0 \rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد $\rightarrow$
- $\dfrac{c}{a}>0$ دو ریشه‌ی متحد العلامه دارد.
  - $\dfrac{-b}{a}>0$ دو ریشه‌ی مثبت
  - $\dfrac{-b}{a}<0$ دو ریشه‌ی منفی
- $\dfrac{c}{a}<0$ دو ریشه‌ی مختلف العلامه دارد.

(۲) $\Delta=0 \rightarrow$ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد $\rightarrow x'=x''=\dfrac{-b}{2a}$ (معادله به یک مربع کامل تبدیل می‌شود)

(۳) $\Delta<0 \rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد

■ **مثال:** بدون حل معادله در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-7x+1=0$ نظر دهید.

◀ **حل:** با محاسبه‌ی $\Delta=(-7)^2-4(2)(1)$ چون $\Delta>0$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، از طرفی چون $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}>0$ دو ریشه‌ی متحدالعلامه‌اند، اما $\dfrac{-b}{a}=\dfrac{7}{2}>0$، پس هر دو ریشه مثبت‌اند.

➢ **تذکر (۱) :** در صورتی که دو ریشه‌ی حقیقی معادله $ax^2+bx+c=0$:

الف – قرینه‌ی هم باشند، آنگاه $b=0$ (زیرا مجموع ریشه‌ها صفر است و $\dfrac{-b}{a}=0$).

ب – عکس هم باشند، آنگاه $a=c$ (زیرا حاصلضرب ریشه‌ها (۱) است و $\dfrac{c}{a}=1$).

➢ **تذکر (۲) :** در بعضی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، می‌توان آن را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد، به این گونه معادلات، معادله‌ی دومجذوری گوییم.

■ **مثال:** تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^4-4x^2-7=0$ را بیابید.

◀ **حل:** با انتخاب $x^2=t$ به معادله‌ی زیر می‌رسیم: $t^2-4t-7=0$

در این معادله $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}=\frac{-7}{1}<0$، پس معادله برحسب $t$، یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد، و در نتیجه برای $x^2=t>0$، دو جواب قرینه برای معادله به‌دست می‌آید.

■ **مثال:** معادله‌ی $(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)+2=0$ را حل کنید.

◀ **حل:** با فرض $x^2-3x=t$، به معادله‌ی $t^2-3t+2=0$ می‌رسیم، ریشه‌های این معادله $t=1$ و $t=2$ است، لذا:

$$x^2-3x=2 \;\rightarrow\; x^2-3x-2=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$x^2-3x=1 \;\rightarrow\; x^2-3x-1=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

پس معادله چهار ریشه دارد.

## معادله‌ی درجه‌ی دوم — تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم و روابط بین ریشه‌ها

### تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر $x'$ و $x''$ به‌ترتیب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم باشند آنگاه $(x-x')(x-x'')=0$ و از آنجا خواهیم داشت:

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0 \qquad (1)$$

از طرفی در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با تقسیم طرفین بر $a\neq 0$ داریم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad (2)$$

از دو معادله‌ی فوق نتیجه می‌گیریم که $x'+x''=\frac{-b}{a}$ و $x'x''=\frac{c}{a}$ .

➢ **تذکر (۳) :** اگر $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه:

$$S=x'+x''=\frac{-b}{a} \quad (\text{مجموع ریشه‌ها})$$

$$P=x'x''=\frac{c}{a} \quad (\text{حاصلضرب ریشه‌ها})$$

در این حالت معادله به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ تبدیل خواهد شد.

■ **مثال:** معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که مجموع ریشه‌هایش ۹ و ضرب ریشه‌هایش ۵ باشد.

◀ **حل:** از آنجایی که $S=9$ و $P=5$ پس معادله $x^2-9x+5=0$ است.

■ **مثال** اگر $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی باشند، آن معادله را بنویسید.

◀ **حل:** از آنجایی که $S=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$ و $P=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$، آنگاه معادله $x^2-2x-1=0$ را خواهیم داشت.

➢ **تذکر (۴) :** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه با استفاده از اتحادها داریم:

$$(1)\quad \alpha^2+\beta^2=S^2-2P$$

$$(2)\quad \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$$

➢ **تذکر (۵) :** اگر $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه $|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

■ **مثال:** اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ ، دو عدد طبیعی متوالی باشند، آنگاه نشان دهید $\Delta=a^2$ .

◀ **حل:** دو ریشه را $\alpha$ و $\alpha+1$ در نظر می‌گیریم لذا تفاضل ریشه‌ها (۱) است پس $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=1$ و از آنجا $\Delta=a^2$ .

➢ **تذکر (۶) :** در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ :

الف – اگر $a+b+c=0$ (مجموع ضرایب صفر باشد)، آنگاه یک ریشه‌ی معادله (۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

ب – اگر $a+c=b$، آنگاه یک ریشه‌ی معادله (۱−) و ریشه‌ی دیگر $\frac{-c}{a}$ است.

■ **مثال:** ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-(۱+\sqrt{۳})x+\sqrt{۳}=۰$ را بیابید.

◀ **حل:** چون مجموع ضرایب معادله صفر است پس یک ریشه (۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}=\sqrt{۳}$ است.

➢ **تذکر (۷) :** در بعضی از مسائل، می‌توانیم از این خاصیت که همواره ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، استفاده کنیم.

■ **مثال:** در معادله‌ی $x^۲-۵x+۱=۰$، اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌ها باشند حاصل $\alpha^۲(۵\beta-۱)$ را بیابید.

◀ **حل:** چون $\beta$ ریشه‌ی معادله است در خود معادله صدق می‌کند، لذا $\beta^۲-۵\beta+۱=۰$ و از آنجا $\beta^۲=۵\beta-۱$، در عبارت حاصل با جاگذاری داریم $\alpha^۲\beta^۲$ یا $(\alpha\beta)^۲$، اما $\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$، پس حاصل $\alpha^۲(۵\beta-۱)=۱$.

## معادله‌ی درجه‌ی دوم — تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید

اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ مفروض باشد و بخواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بیابیم که ریشه‌هایش با ریشه‌های معادله‌ی اول رابطه‌ی مشخصی داشته باشد، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) ریشه‌ی معادله‌ی قدیم را $x$ و ریشه‌ی معادله‌ی جدید را $y$ فرض می‌کنیم.

(۲) رابطه‌ی بین $x$ و $y$ را می‌یابیم.

(۳) $x$ را برحسب $y$ می‌یابیم و در معادله‌ی اول جاگذاری می‌کنیم و سپس با عملیات جبری معادله را می‌نویسیم.

■ **مثال:** معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۳x+۱=۰$ باشد.

◀ **حل:** با توجه به خواسته‌ی مسأله $y=x^۲$، پس $x=\pm\sqrt{y}$، حال در معادله قرار می‌دهیم:

$$(\pm\sqrt{y})^۲-۳(\pm\sqrt{y})+۱=۰\rightarrow y+۱=\pm۳\sqrt{y}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(y+۱)^۲=۹y\rightarrow y^۲+۲y+۱=۹y\rightarrow y^۲-۷y+۱=۰ \quad (\text{معادله‌ی مطلوب})$$

➢ **تذکر (۸):** روش دیگری نیز برای یافتن این معادله وجود دارد که محاسبه‌ی $S$ و $P$ در معادله‌ی جدید و نوشتن معادله‌ی $x^۲-Sx+P=۰$ است.

در مثال بالا، اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند آنگاه $\alpha^۲$ و $\beta^۲$ ریشه‌های معادله‌ی جدید هستند، پس:

$$\left.\begin{array}{l} S=\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۳^۲-۲(۱)=۷ \\ P=\alpha^۲\beta^۲=(\alpha\beta)^۲=(۱)=۱\rightarrow x^۲-۷x+۱=۰ \end{array}\right\}\rightarrow x^۲-۷x+۱=۰ \quad (\text{معادله‌ی مطلوب})$$

## معادلات گنگ

معادلاتی که شامل عبارات رادیکالی باشند را، معادلات گنگ می‌نامیم.
روش کلی برای حل معادلات گنگ وجود ندارد، اما دو موضوع در حل معادلات گنگ از اهمیت خاصی برخوردار است.
(۱) تعیین دامنه‌ی متغیر معادله
(۲) خارج کردن معادله از حالت گنگ، با به توان رساندن طرفین معادله
بعضی روش‌هایی که در حل معادلات گنگ کمک می‌نماید را در زیرخواهیم دید:

برای حل معادلات با فرجه‌ی زوج، ابتدا حوزه‌ی تعریف معادله را معین کرده، سپس با به‌توان فرجه رساندن طرفین معادله، معادله ای را نتیجه می‌گیریم، با حل این معادله، ریشه‌هایی که در حوزه‌ی تعریف معادله‌ی اولیه هستند، ریشه‌ی معادله می‌باشند، شکل غالب این گونه معادلات به‌صورت زیر است:

| معادله | شرایط (حوزه‌ی تعریف) | معادله‌ی تبدیل یافته | توضیح |
|---|---|---|---|
| (۱) $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ | $f(x)\geq۰\cap g(x)\geq۰$ | $f(x)=g(x)$ | طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم |
| (۲) $\sqrt{f(x)}=g(x)$ | $f(x)\geq۰\cap g(x)\geq۰$ | $f(x)=g^۲(x)$ | طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم |

**مثال:** معادله‌ی $\sqrt{x+۲}=x$ را حل کنید.

◀ **حل:** دامنه‌ی متغیر معادله از اشتراک شرایط $x+۲\geq ۰$ یا $x\geq -۲$ و $x\geq ۰$ (سمت راست معادله) به‌دست می‌آید، در نتیجه $x\geq ۰$ است. حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $x+۲=x^۲ \rightarrow x^۲-x-۲=۰ \rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰ \rightarrow x=۲$ یا $x=-۱$

که تنها $x=۲$ با توجه به حوزه‌ی تعریف معادله، قابل قبول است.

➢ **تذکر (۹):** در بعضی از معادلات گنگ، می‌توان با انتخاب متغیر جدیدی، معادله را به معادلات ساده‌تر و یا گاهی معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد و آن را حل نمود.

## تابع درجه‌ی دوم

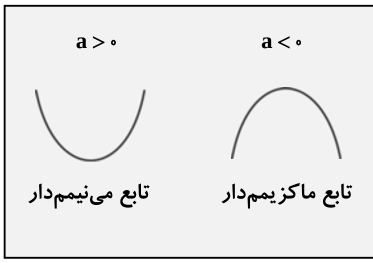
هر تابع به صورت $y=ax^۲+bx+c$ ، $a\neq ۰$ نمایش یک تابع درجه‌ی دوم است:

**ماکزیمم یا می‌نیمم**

ماکزیمم یا می‌نیمم مقدار تابع درجه‌ی دوم در نقطه‌ای به‌طول $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید:

الف – اگر $a>۰$ تابع می‌نیمم‌دار است و می‌نیمم آن $f\left(\frac{-b}{۲a}\right)$ است.

ب – اگر $a<۰$ تابع ماکزیمم‌دار است و ماکزیمم آن $f\left(\frac{-b}{۲a}\right)$ است.



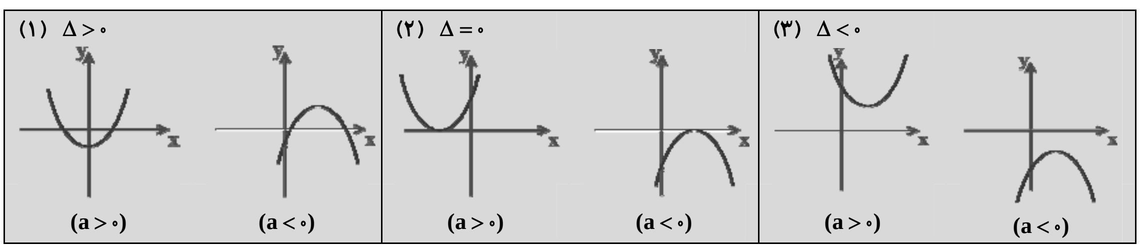

**تذکر (۱۰):** در تابع درجه‌ی دوم $f\left(\frac{-b}{۲a}\right)=\frac{-\Delta}{۴a}$ است.

**محورتقارن**

محورتقارن تابع خط $x=\frac{-b}{۲a}$ است که ازنقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) عبور می‌کند.

**نمودار تابع درجه‌ی دوم**

نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ ، با توجه به شرایط $a$ و $\Delta$ به صورت‌های زیر است:




**توجه:** برای پیداکردن شکل دقیق علاوه بر $a$ و $\Delta$، به اطلاعات دیگری نیز نیاز داریم.

➢ **تذکر (۱۱):** در نقطه‌ی min یا max، خط $y=f(\frac{-b}{2a})$ بر منحنی تابع مماس است. هرگاه خطی بر یک منحنی مماس شود، معادله‌ی تلاقی خط و منحنی، دارای ریشه‌ی مضاعف است.

➢ **تذکر (۱۲):** با توجه به حالت (۱)، اگر $ac<۰$، آنگاه نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند (چرا؟)

■ **مثال:** نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^۲+۴x-۱$ از کدام نواحی عبور می‌کند؟

◀ **حل:** چون $ac=-۱<۰$، پس نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

➢ **تذکر (۱۳):** با توجه به حالت (۲)،

الف – اگر $a>۰$ و $\Delta=۰$، تابع از بالا بر محور $x$ها مماس است.

ب – اگر $a<۰$ و $\Delta=۰$، تابع از پایین بر محور $x$ها مماس است.

➢ **تذکر (۱۴):** با توجه به حالت (۳)،

الف – اگر $a>۰$ و $\Delta<۰$، $f(x)=ax^۲+bx+c>۰$، یعنی تابع همواره بالای محور $x$هاست.

ب – اگر $a<۰$ و $\Delta<۰$، $f(x)=ax^۲+bx+c<۰$، یعنی تابع همواره پائین محور $x$ هاست.

**شکل‌های دیگر تابع درجه‌ی دوم**

به دو شکل زیر در تابع درجه‌ی دوم و نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم آن توجه کنید.

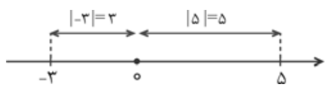
(۱) در حالتی که ضابطه‌ی تابع به‌صورت $f(x)=a(x-h)^۲+k$ باشد، نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم $(h\,,\,k)$ است.

(۲) در حالتی که ضابطه‌ی تابع به‌صورت $f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ باشد، نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم $\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲}\,,\,f(\frac{x_۱+x_۲}{۲})\right)$ است.

**تابع قدرمطلق**
- قدر مطلق و ویژگی‌های آن
- نمودار توابع قدر مطلق

**تعریف:** اگر $a$ عددی حقیقی باشد، قدرمطلق $a$ برابر است با:

$$|a|=\begin{cases} a & , \quad a\geq ۰ \\ -a & , \quad a<۰ \end{cases}$$




توجه: $|x|$، فاصله‌ی متغیر $x$ روی محور اعداد تا مبدأ است (به شکل بالا توجه کنید). به همین ترتیب $|x-۴|$ فاصله‌ی نقطه‌ی $x$ تا ۴ است.

■ **مثال:** عبارت‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

(a) $\big||-۶|-|-۴|\big|$ (b) $|\sin x-۲|$

◂ **حل:** (a) $|-۶|=۶$ و $|-۴|=۴$، پس $|۶-۴|=|۲|=۲$ .

(b) از آنجایی که $-۱\leq \sin x\leq ۱$ پس $-۳\leq \sin x-۲\leq -۱$، لذا $|\sin x-۲|=-(\sin x-۲)$

**تساوی‌های قدر مطلقی**

هنگام کار با قدرمطلق خواص و ویژگی‌هایی وجود دارند که در زیر خلاصه شده است:

| توضیح | مثال | خاصیت |
|---|---|---|
| قدرمطلق هر عددی همواره نامنفی است. | $\lvert -۳\rvert=۳>۰$ | (۱) $\lvert a\rvert\geq ۰$ |
| | $\lvert ۱-x\rvert=\lvert x-۱\rvert$ | (۲) $\lvert a\rvert=\lvert -a\rvert$ |
| | $\sqrt{x^۲-۲x+۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=\lvert x-۱\rvert$ | (۳) $\sqrt{a^۲}=\lvert a\rvert$ |
| قدرمطلق حاصلضرب برابر است با حاصلضرب قدرمطلق‌ها | $\lvert -۲\times ۵\rvert=\lvert -۲\rvert\lvert ۵\rvert=۲\times ۵=۱۰$ | (۴) $\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\lvert b\rvert$ |
| | $\left\lvert\frac{x-۱}{x-۲}\right\rvert=\frac{\lvert x-۱\rvert}{\lvert x-۲\rvert}\ ,\ x\neq ۲$ | (۵) $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}\ ،\ b\neq ۰$ |

**نامساوی‌های قدر مطلقی**

خواص زیر در نامساوی‌های قدرمطلقی برقرار هستند: $(a>۰)$

| نامساوی معادل | شکل معادله | نامساوی |
|---|---|---|
| • $x^۲<a^۲$ | $-a<x<a$ | (۱) $\lvert x\rvert<a$ |
| • $x^۲\leq a^۲$ | $-a\leq x\leq a$ | (۲) $\lvert x\rvert\leq a$ |
| • $x^۲>a^۲$ | $x<-a$ یا $x>a$ | (۳) $\lvert x\rvert>a$ |
| • $x^۲\geq a^۲$ | $x\geq a$ یا $x\leq -a$ | (۴) $\lvert x\rvert\geq a$ |

■ **مثال:** نامساوی‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید:

(a) $|x-۱|<۲$ (b) $|۳x+۱|\geq ۵$

◂ **حل:** (a) با توجه به قاعده‌ی (۱)، $-۲<x-۱<۲$، پس $-۱<x<۳$ .

(b) با توجه به قاعده‌ی (۴)، $۳x+۱\geq ۵$ یا $۳x+۱\leq -۵$ بنابراین $x\geq \frac{۴}{۳}$ یا $x\leq -۲$ .

➢ **تذکر (۱۵) :** برای هر عدد حقیقی $a$، می‌توان نشان داد که $-|a| \le a \le |a|$.

**نامساوی مثلثی**

**با استفاده از جدول نامساوی‌ها، می‌توانیم تعداد دیگری از نامساوی‌های قدرمطلقی را بیابیم، مهم‌ترین آن‌ها، نامساوی مثلثی است.**

| |
|---|
| نامساوی مثلثی: اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، آنگاه: |
| $\lvert a+b \rvert \le \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ |
| تساوی زمانی امکان‌پذیر است که $ab \ge ۰$. |

**توجه:** با انتخاب $a = x - y$ و $b = y$ و قرار دادن در نامساوی به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$|(x-y)+y| \le |x-y| + |y| \Rightarrow |x-y| \ge |x| - |y|$$

**نمودار توابع قدر مطلقی**

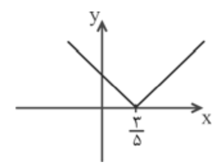
**روش کلی رسم:** برای رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق، باید تابع را به ازای ریشه (ریشه‌های) داخل قدرمطلق، ضابطه‌بندی نمود، سپس تابع به‌دست آمده را ، به ازای بازه‌های مورد نظر رسم کنیم.

■ **مثال:** نمودار توابع زیر را رسم کنید:

$$(a)\ y = |۵x - ۳| \qquad (b)\ y = x + |x|$$

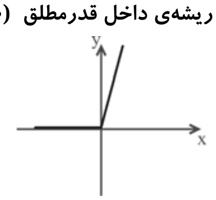
◀ **حل:** $(a)$ ریشه‌ی داخل قدرمطلق $\frac{۳}{۵}$ است، پس دو بازه در نظر می‌گیریم:

$$y = |۵x-۳| = \begin{cases} ۵x - ۳ & , \quad x \ge \frac{۳}{۵} \quad \text{نقاط کمکی} \rightarrow (\frac{۳}{۵}, ۰) \quad , \quad (۲, ۷) \\ ۳ - ۵x & , \quad x < \frac{۳}{۵} \quad \text{نقاط کمکی} \rightarrow (\frac{۳}{۵}, ۰) \quad , \quad (۰, ۳) \end{cases}$$




$(b)$ ریشه‌ی داخل قدرمطلق $(۰)$ است، پس دو بازه در نظر می‌گیریم:

$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x = ۲x & , \quad x \ge ۰ \quad \text{نقاط کمکی} \rightarrow (۰, ۰) \quad , \quad (۱, ۲) \\ x - x = ۰ & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

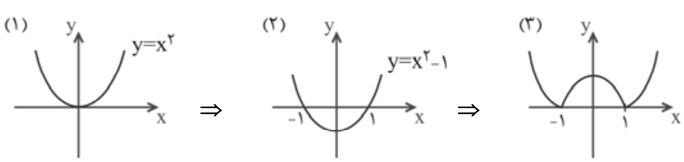



**رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ :**

برای رسم تابع $y = |f(x)|$، ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی از نمودار که در زیر محور $x$ هاست را ، نسبت به محور $x$ ها قرینه کرده و قسمت پایین محور $x$ ها را حذف می‌کنیم.

■ **مثال:** نمودار تابع $y = |x^۲ - ۱|$ را رسم کنید.

◀ **حل:** ابتدا تابع $y = x^۲$ را رسم می‌کنیم (۱). سپس این تابع را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا تابع $y = x^۲ - ۱$ به‌دست آید (۲) و در مرحله‌ی آخر قسمت پایین محور $x$ ها را قرینه می‌کنیم:

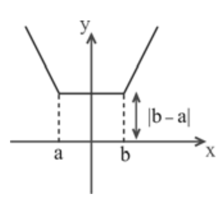



**رسم دو تابع خاص**

**۱- نمودار تابع با ضابطه‌ی** $y = |x-a| + |x-b| \quad (a < b)$

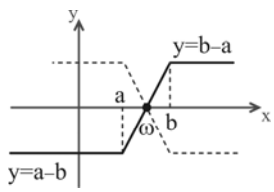
برای رسم نمودار این تابع با ضابطه‌بندی به ازای ریشه‌های داخل قدر مطلق داریم:

| $x$ | $-\infty$ | $a$ | $b$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y = -۲x + a + b$ | | $y = b - a$ | $y = ۲x - a - b$ |




نمودار تابع از یک پاره‌خط موازی محور $x$ ها به طول $b - a$ و دو نیم خط به شیب‌های (۲) و (۲-) تشکیل شده است. تابع دارای محور تقارنی به معادله‌ی $x = \frac{a+b}{۲}$ است.

برای رسم نیازی به تشکیل جدول نیست. ریشه‌های داخل قدرمطلق را بیابید و مقدار تابع را در آن نقاط محاسبه کرده، پاره‌خط موازی محور xها به دست می‌آید. سپس دو نیم خط به شیب‌های (۲) و (۲-) را رسم کنید.




**۲– نمودار تابع با ضابطه‌ی** $y=|x-a|-|x-b| \quad (a<b)$

با ضابطه‌بندی به ازای ریشه‌های داخل قدرمطلق داریم:

| x | $-\infty$ | a | | b | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $y=a-b$ | | $y=۲x-a-b$ | | $y=b-a$ |

در حالتی که $a>b$ باشد، شکل نقطه‌چین به دست می‌آید. این تابع مرکز تقارنی به مختصات $\omega\left(\frac{a+b}{۲}, ۰\right)$ دارد.

**تابع قدرمطلق**
- **معادلات قدر مطلقی**
- **نامعادلات قدر مطلقی**

به معادلاتی که شامل عبارت‌های قدر مطلقی هستند، معادله‌ی قدرمطلقی گوییم. در زیر نمونه‌هایی از معادلات قدرمطلقی آورده شده است:

$|x-۱|=۳ \quad ، \quad |x-۵|=|x-۲| \quad ، \quad |x+۱|+|x-۲|=۵$

**روش های حل معادلات قدر مطلقی**

**۱– روش کلی حل:** برای حل یک معادله‌ی قدر مطلقی، باید عبارت را به ازای ریشه یا ریشه‌های داخل قدرمطلق تعیین علامت کنیم و با حذف قدرمطلق، معادله‌ی حاصل را حل کنیم، جواب‌هایی قابل قبول هستند که در بازه‌ی اختیاری ، صدق کنند.

■ **مثال:** معادله‌ی $x-۲+|x-۳|=۱$ را حل کنید.

◀ **حل:** ریشه‌ی داخل قدر مطلق $x=۳$ است، پس

$x\geq ۳: \; x-۲+(x-۳)=۱ \to ۲x=۶ \to x=۳$ (قابل قبول)

$x<۳: \; x-۲-(x-۳)=۱ \to ۱=۱$ همواره برقرار است

پس مجموعه‌ی جواب معادله $x<۳\cup\{۳\}$ یا بازه‌ی $(-\infty, ۳]$ است.

**۲– استفاده از خواص و ویژگی های قدرمطلق**

برای حل بعضی ازمعادلات قدرمطلقی، می‌توانیم از حل معادلات معادل آن یا خواص قدرمطلق استفاده کنیم و جواب‌های آن معادله را بیابیم. در زیر تعدادی از این معادلات دیده می‌شود.

| مثال | جواب کلی | معادله‌ی معادل | معادله‌ی اصلی |
|---|---|---|---|
| $\|x-۳\|=۲ \Rightarrow x-۳=\pm ۲ \Rightarrow x=۵, ۱$ | $x=\pm a$ | $x^۲=a^۲$ | (۱) $\|x\|=a$ |
| $\|x-۳\|=\|x\| \Rightarrow x-۳=\pm x \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$ | $u=\pm v$ | $u^۲=v^۲$ | (۲) $\|u\|=\|v\|$ |
| $\|۲x-۳\|=x \Rightarrow ۲x-۳=\pm x, \; x\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases}۲x-۳=x \to x=۳\\ ۲x-۳=-x \to x=۱\end{cases}$ | $u=\pm v, \; v>۰$ | $u^۲=v^۲, \; v\geq ۰$ | (۳) $\|u\|=v$ |
| $\|x-۲\|=x-۲ \Rightarrow x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲$ | $u\geq ۰$ | _ | (۴) $\|u\|=u$ |
| $\|۲x-۱\|=۱-۲x \Rightarrow ۲x-۱\leq ۰ \Rightarrow x\leq \frac{۱}{۲}$ | $u\leq ۰$ | _ | (۵) $\|u\|=-u$ |

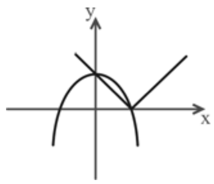
➢ **تذکر (۱۶) :** اگر مجموع چند قدرمطلق صفر باشد، آنگاه هر کدام باید صفرباشند.

■ **مثال:** معادله‌ی $|x^۲-۱|+|x^۲-۳x+۲|=۰$ را حل کنید.

◀ **حل:** باید هر کدام از معادلات صفر باشند پس $x^۲-۱=۰$ و $x^۲-۳x+۲=۰$، جواب‌های این معادلات به‌ترتیب $(x=-۱, x=۱)$ و $(x=۱, x=۲)$ هستند، باید جوابی بگیریم که هر دو را با هم صفر کند، پس $x=۱$ جواب معادله است.

**۳– استفاده از رسم نمودار**

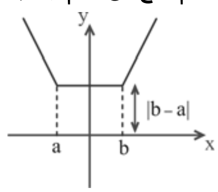
در بعضی از موارد برای تعیین تعداد ریشه های یک معادله ی قدرمطلقی می توان از روش هندسی استفاده کرد. مبنای این روش استفاده از نقاط تقاطع دو منحنی است ، در این حالت تابع قدرمطلق را یک طرف معادله و بقیه را در طرف دیگر قرار داده و توابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می کنیم، محل تلاقی دو نمودار ریشه‌های معادله است.




■ **مثال:** معادله‌ی $|x-۱|+x^۲=۱$ چند جواب دارد؟

◀ **حل:** خواهیم داشت $|x-۱|=۱-x^۲$ پس با رسم دوتابع $y_۱=|x-۱|$ و $y_۲=۱-x^۲$ در یک دستگاه دیده می شود که معادله ۲ ریشه دارد.

➢ **تذکر (۱۷):** برای حل معادله‌ی $|x-a|+|x-b|=k>۰$ $(a<b)$، نمودار $y=|x-a|+|x-b|$ و خط $y=k$ را با هم قطع می‌دهیم. با توجه به نمودار خواهیم داشت:



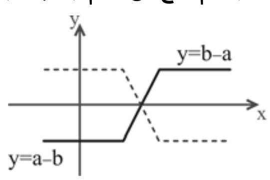

الف- $k>|b-a|$ معادله دو ریشه دارد.

ب- $k=|b-a|$ معادله بی‌شمار ریشه دارد.

ج- $k<|b-a|$ معادله ریشه ندارد.

به عنوان مثال در معادله‌ی $|x|+|x-۱|=۲$ چون $k=۲>b-a=۱-۰$ است. پس معادله دو ریشه دارد، هم‌چنین در معادله‌ی $|x|+|x-۱|=۱$ چون $k=b-a$ معادله بی‌شمار ریشه دارد.

➢ **تذکر (۱۸):** برای حل معادله‌ی $|x-a|-|x-b|=k$ $(a<b)$، نمودار $y=|x-a|-|x-b|$ و خط $y=k$ را با هم قطع می‌دهیم. با توجه به نمودار خواهیم داشت:




الف- اگر $a-b<k<b-a$ معادله یک ریشه دارد.

ب- اگر $k=\pm(b-a)$ معادله بی‌شمار ریشه دارد.

ج- اگر $k>|b-a|$ معادله ریشه ندارد.

**نامعادلات قدر مطلقی**

هر نامعادله که شامل عبارات قدر مطلقی باشد، یک نامعادله‌ی قدر مطلقی نامیده می‌شود.

**روش کلی حل:** برای حل یک نامعادله‌ی قدرمطلقی، باید عبارت را به ازای ریشه یا ریشه‌های داخل قدرمطلق تعیین علامت کنیم و با حذف قدرمطلق، نامعادله‌ی حاصل را حل کنیم، جواب به‌دست آمده را با بازه‌ی اختیار شده، اشتراک می‌گیریم.

■ **مثال :** نامعادله‌ی $۲x+|x-۱|<۱$ را حل کنید.

◀ **حل:** ریشه‌ی داخل قدرمطلق $x=۱$ است، پس:

$x\ge ۱:\ ۲x+(x-۱)<۱\Rightarrow ۳x-۱<۱\ \to\ x<\frac{۲}{۳}$ (اشتراکی ندارند)

$x<۱:\ ۲x-(x-۱)<۱\Rightarrow x+۱<۱\ \to\ x<۰$ (اشتراک دارند)

پس مجموعه جواب بازه‌ی $(-\infty\,,\,۰)$ است.

➢ **تذکر (۱۹):** در حل نامعادله‌های قدرمطلقی می‌توانیم از نامساوی‌های قدرمطلقی زیر استفاده کنیم:

$$(۱)\ \begin{cases}|x|\le a\\ x^۲\le a^۲\end{cases}\xrightarrow{a>۰} -a\le x\le a \qquad\qquad (۲)\ \begin{cases}|x|\ge a\\ x^۲\ge a^۲\end{cases}\xrightarrow{a>۰} x\ge a \ \text{یا}\ x\le -a$$

## تابع جزء صحیح

**تعریف جزء صحیح و روابط موجود**

| |
|---|
| **تعریف:** برای هر عدد حقیقی مانند x، عدد منحصر بفرد n و عدد اعشاری p $(۰\le p<۱)$ وجود دارد که $x=n+p$ باشد، عدد صحیح n را با نماد [x] نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر: $n\le x<n+۱\to [x]=n$ |

به عنوان مثال برای عدد ۳/۲۵، جزء صحیح عدد ۳ است زیرا: $۳<۳/۲۵<۴\ \to\ [۳/۲۵]=۳$

همچنین برای عدد ۱/۲۵-، جزء صحیح عدد برابر (۲-) است زیرا: $-۲<-۱/۲۵<-۱\ \to\ [-۱/۲۵]=-۲$

بنابراین طبق تعریف، جزء صحیح یک عدد، بزرگترین عدد صحیح نابیشتر (کوچکتر یا مساوی) آن عدد است.

## ۱– تساوی های جزء صحیح

با استفاده از تعریف جزءصحیح، تساوی‌های زیر را خواهیم داشت:

| خاصیت | مثال |
|---|---|
| (۱) $x\in Z:\ [x]=x$ | $[۵]=۵$ |
| (۲) $x\in Z:\ [-x]=-x$ | $[-۳]=-[۳]=-۳$ |
| (۳) $x\notin Z:\ [-x]=-[x]-۱$ | $[-۳/۲۵]=-[۳/۲۵]-۱=-۴$ |
| (۴) $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & , \quad x\in Z\\ -۱ & , \quad x\notin Z\end{cases}$ | |
| (۵) $[x+k]=[x]+k$ ، $k\in Z$ | $[x+۳]=[x]+۳$ |
| (۶) $[x+[x]]=۲[x]$ | $[۲/۵+[۲/۵]]=۲[۲/۵]=۴$ |

■ **مثال:** حاصل $[\log_{۳}^{۲۸}]$ را بیابید.

◂ **حل:** باید ببینیم که $\log_{۳}^{۲۸}$ بین کدام دو عدد متوالی است، از آنجایی که $۳^{۴}>۲۸>۳^{۳}$، بنابراین $۴>\log_{۳}^{۲۸}>۳$ پس $[\log_{۳}^{۲۸}]=۳$ .

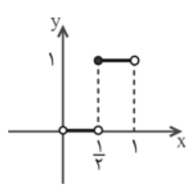
## ۲– نامساوی های جزء صحیح

با استفاده از تعریف جزء صحیح می‌توان نامساوی‌های زیر را ثابت کرد:

| | |
|---|---|
| (۱) $[x]\le x<[x]+۱$ | (در تعریف به جای $n$، $[x]$ قرار دهید) |
| (۲) $۰\le x-[x]<۱$ | (به طرفین نامساوی (۱)، $-[x]$ اضافه می‌کنیم) |
| (۳) $[x-[x]]=۰$ | (در نامساوی (۲)، عددی بین صفر و یک را داریم) |
| (۴) $[x]\ge a \xrightarrow{a\in Z} x\ge a$ | |
| (۵) $[x]>a \xrightarrow{a\in Z} x\ge a+۱$ | |
| (۶) $[x]\le a \xrightarrow{a\in Z} x<a+۱$ | |
| (۷) $[x]<a \xrightarrow{a\in Z} x<a$ | |

### نمودار تابع شامل جزء صحیح

فرض کنید می‌خواهیم نمودار تابع $y=[۲x]$ را در بازه‌ی $(۰\,,\,۱)$ رسم کنیم، اگر $۰<x<۱$ باشد آنگاه $۰<۲x<۲$، پس:




$$۰<۲x<۱ \rightarrow [۲x]=۰ \quad \text{و} \quad ۰<x<\frac{۱}{۲}$$

$$۱\le ۲x<۲ \rightarrow [۲x]=۱ \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۲}\le x<۱$$

❖ **نتیجه:** در نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[ax]$، طول هر پله $\frac{۱}{|a|}$ و ارتفاع آن‌ها (۱) است.

### رسم نمودار تابع باضابطه‌ی $y=[f(x)]$

برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[f(x)]$، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف – تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم.

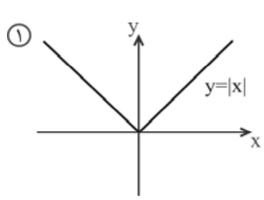
ب – خطوط $y=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$ را رسم می‌کنیم.

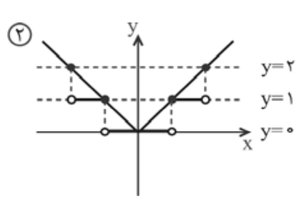
ج – قسمت‌هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y=k$ و $y=k+۱$ قرار می‌گیرد را بر روی خط $y=k$ تصویر می‌کنیم.

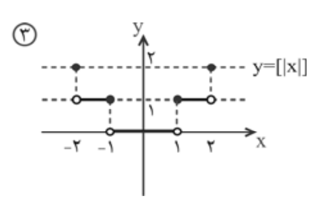
د – در نقاط تلاقی خط و نمودار، نقطه توپر است.

■ **مثال:** نمودار تابع $y=[|x|]$ را در بازه‌ی $-۲\le x\le ۲$ رسم کنید.

◂ **حل:** نمودار $y=|x|$ در شکل (۱) رسم شده است، وقتی $-۲\le x\le ۲$ است، آنگاه $۰\le|x|\le ۲$ خواهد بود، پس سه خط $y=۰$، $y=۱$ و $y=۲$ را داریم (شکل ۲)، با تصویر قسمت‌های بین نمودار و این خطوط شکل (۳) به‌دست می‌آید.



**معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح**

برای حل معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح، از تعریف و روابط و یا رسم نمودار استفاده می‌کنیم.

به روابط زیر توجه کنید:

$$(۱)\ [u]=k \xrightarrow{k\in Z} k\le u<k+۱ \qquad (۴)\ [u]>a \xrightarrow{a\in Z} u\ge a+۱$$

$$(۲)\ [u]\ge a \xrightarrow{a\in Z} u\ge a \qquad (۵)\ [u]<a \xrightarrow{a\in Z} u<a$$

$$(۳)\ [u]\le a \xrightarrow{a\in Z} u<a+۱ \qquad (۶)\ [u]+[-u]=\begin{cases} ۰ & , \quad u\in Z \\ -۱ & , \quad u\notin Z \end{cases}$$

■ **مثال:** معادله‌ی $\left[\frac{x}{۴}\right]=\frac{x}{۳}$ را حل کنید.

◀ **حل:** از آنجایی که $\left[\frac{x}{۴}\right]$ عددی صحیح است پس $\frac{x}{۳}$ نیز عددی صحیح خواهد بود لذا $\frac{x}{۳}=k\in Z$ و از آنجا $x=۳k$:

$$\left[\frac{x}{۴}\right]=\frac{x}{۳} \Rightarrow \frac{x}{۳}\le\frac{x}{۴}<\frac{x}{۳}+۱ \longrightarrow \underbrace{۴x\le \overbrace{۳x}_{}}_{(۱)}\overbrace{<۴x+۱۲}^{(۲)}$$

دو نامعادله‌ی (۱) و (۲) را جداگانه حل می‌کنیم و مجموعه جواب آن را می‌یابیم، بنابراین $-۱۲<x\le ۰$، اما x باید مضرب ۳ باشد، بنابراین جواب‌های قابل قبول ۰، ۳−، ۶− و ۹− خواهد بود.

■ **مثال:** نا معادله‌ی $[۳x]>۴$ را حل کنید.

◀ **حل:** با استفاده از نامساوی (۴)، $۳x\ge ۴+۱$، لذا $۳x\ge ۵$ و از آنجا $x\ge\frac{۵}{۳}$ .

## دنباله‌ها — تعریف – جمله عمومی–نمایش محوری

**تعریف:** هر تابع که دامنه‌اش اعداد طبیعی و برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد، یک دنباله‌ی نامتناهی از اعداد حقیقی نامیده می‌شود و به صورت $a: N \to R$ نمایش داده می‌شود.

معمولاً جمله‌ی عمومی یک دنباله را با $a_n$ نمایش می‌دهیم.

➢ **تذکر (۲۰):** یک دنباله را با $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نمایش می‌دهیم. می‌توانیم به جای این نوع نمایش از نماد $\{a_n\}$ استفاده کنیم که نشانگر کلیه‌ی جملات دنباله از جمله‌ی اول تا بی‌نهایت است.

➢ **تذکر (۲۱):** با داشتن جمله‌ی عمومی یک دنباله می‌توانیم خود دنباله را بنویسیم. به عنوان مثال در دنباله‌ی $\{n^2\}$، جملات دنباله به‌صورت زیر است:

$1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$

➢ **تذکر (۲۲):** دنباله‌ی $\{c\}$ ( $c$ یک عدد حقیقی و ثابت است) را یک دنباله‌ی ثابت می‌نامیم.

**تعریف ریاضی:** دنباله‌ی $\{a_n\}$ را به عدد $L$ همگرا گوئیم هرگاه:

$$\underset{\text{اندیس جمله}}{\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in N} \quad \text{و} \quad n \geq M \Rightarrow \underbrace{|a_n - L|}_{L \text{ فاصله‌ی کلیه‌ی جملات از }} < \varepsilon$$


و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. به عدد $L$ نقطه‌ی همگرایی دنباله نیز می‌گوییم.

## دنباله‌ها — محاسبه‌ی همگرایی و واگرایی

**قضیه** اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، حد آن یکتاست و داریم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

❖ **نتیجه‌ی کلی:** اگر $\{a_n\}$ همگرا نباشد، آنگاه واگراست و به عبارت دیگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ وجود ندارد. برای بررسی همگرایی و واگرایی یک دنباله حالت کلی زیر را داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} = L \to \quad \text{دنباله همگراست} & \text{مثال}: \left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{2^n}\right\} \\ \begin{cases} = \infty & \text{مثال}: \{\sqrt{n}\}, \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\} \\ = \text{دو یا چند عدد متمایز} & \text{مثال}: \{(-1)^n\}, \left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\} \\ \text{عددی غیر مشخص باشد} & \text{مثال}: \{\sin n\}, \{\cos n\} \end{cases} \end{cases}$$

### محاسبات همگرایی و واگرایی در دنباله‌ها

**نکته‌ی ۱** هرچند جمله‌ای از $x$ وقتی $x \to \infty$، هم‌ارز است با جمله‌ای که توان $x$ در آن بزرگتر باشد.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_n}{b_1x^m + b_2x^{m-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} \infty & , \quad n > m \\ \frac{a_1}{b_1} & , \quad n = m \\ 0 & , \quad n < m \end{cases}$$

به عنوان مثال $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}+1}{2n\sqrt{n}+2} = \frac{1}{2}$ است.

**نکته‌ی ۲** در دنباله‌ی $\{c^n\}$ ( $c$ یک عدد حقیقی و ثابت است)، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} =0 & , \ |c|<1 \quad \boxed{\text{مثال}} : \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=0 \\ =1 & , \ c=1 \\ = \boxed{\text{واگرا}} & , \ c=-1 \\ = \boxed{\text{واگرا}} & , \ |c|>1 \quad \boxed{\text{مثال}} : \lim_{n\to\infty} (\log 20)^{n+1}=\infty \end{cases}$$

**نکته‌ی ۳** وقتی $n$ سیر طبیعی خود را به بی‌نهایت طی کند، نامساوی‌های زیر همواره برقرار است:

$$n^n > n! > \underset{a>1}{a^n} > \underset{p>1}{n^p} > n > \sqrt{n} > \log n^k$$

به این نامساوی، نامساوی رشد گوییم.

به عنوان مثال: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$ (سرعت رشد صورت کم‌تر است) و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$ (سرعت رشد صورت کم‌تر است)

**نکته‌ی ۴** از هم‌ارزی‌های زیر در تست‌ها می‌توان کمک گرفت:

(۱) $\underset{u\to 0}{\sin u \approx u}$ (۲) $\underset{u\to 0}{\tan u \approx u}$

(۳) $\underset{u\to 0}{1-\cos u \approx \frac{u^2}{2}}$ (۴) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+an+b}\approx n+\frac{a}{2}$

**دنباله‌ها** | یکنوایی و کران‌داری دنباله‌ها

**دنباله‌های یکنوا:**

۱- دنباله‌ی $\{a_n\}$ را صعودی گویند هرگاه:

$$\forall n\in N: a_{n+1}\ge a_n$$

یا

$$a_1\le a_2\le a_3\le \dots \le a_n\le \dots$$

به عنوان مثال دنباله‌های $\{n\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ و $\{2^n\}$ و $\{\log n\}$ همگی صعودی‌اند.

۲- دنباله‌ی $\{a_n\}$ را نزولی گویند هرگاه:

$$\forall n\in N: a_{n+1}\le a_n$$

یا

$$a_1\ge a_2\ge a_3\ge \dots \ge a_n\ge \dots$$

به عنوان مثال دنباله‌های $\{-n\}$، $\left\{\frac{1}{n}\right\}$، $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ و $\left\{\log_{0/1}^{n}\right\}$ همگی نزولی‌اند.

۳- دنباله‌ی عدد ثابت $\{c\}$ را دنباله‌ای هم صعودی و هم نزولی گوییم. به عنوان مثال $\{\sin n\pi\}$ یا $\{n-[n]\}$.

۴- دنباله‌ی نه صعودی و نه نزولی:

در سه حالت زیر دنباله نه صعودی و نه نزولی است:

الف – دنباله‌های نوسانی نه صعودی‌اند و نه نزولی. به عنوان مثال $\{(-1)^n\}$، $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ و $\{\sin n\}$.

ب – هرگاه به ازای تعدادی جمله ، دنباله صعودی و بعد نزولی باشد. به عنوان مثال دنباله‌ی $\{n^2-9n+11\}$ به ازای $n\ge 5$ صعودی و به ازای $n\le 4$ نزولی است. این دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

ج – دنباله‌هایی که مجانب قائم را در بین اعداد طبیعی می‌پذیرند. به‌عنوان مثال دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{2n-7}\right\}$ نه صعودی و نه نزولی است.

**روش‌های تشخیص یکنوایی**

برای بررسی یکنوایی توابع چند روش را مطرح می‌کنیم.

**روش اول: مقایسه‌ی $a_n$ و $a_{n+1}$ (روش کتاب درسی)**

در این روش $a_{n+1}-a_n$ را محاسبه می‌کنیم. اگر $\geq 0$ شد دنباله صعودی و اگر $\leq 0$ شد دنباله نزولی است.

به عنوان مثال در دنباله‌ی $\{n^2\}$ داریم:

$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1>0 \rightarrow$ دنباله صعودی است.

**روش دوم: استفاده از مشتق تابع حقیقی(خارج کتاب درسی)**

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر به ازای $x\geq 1$ باشد، آنگاه اگر $f'(x)\geq 0$ تابع صعودی و لذا دنباله‌ی آن صعودی است، و اگر $f'(x)\leq 0$ باشد، تابع نزولی، لذا دنباله‌ی آن نیز نزولی است. به عنوان مثال دنباله‌ی $\left\{\frac{n+3}{n+1}\right\}$ نزولی است زیرا:

$$f(x)=\frac{x+3}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}\Bigg|_{x\geq 1}<0$$

**روش سوم: استفاده از قضایای یکنوایی(خارج کتاب درسی)**

۱- اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی (نزولی) باشد، دنباله‌ی $\{-a_n\}$ نزولی (صعودی) است.

۲- اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و مثبت باشد، دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ نزولی و مثبت است.

به عنوان مثال دنباله‌ی $\left\{\frac{-1}{n^3+3n}\right\}$ صعودی است زیرا دنباله‌ی $n^3+3n$ صعودی و $\frac{1}{n^3+3n}$ نزولی و بنابراین $\frac{-1}{n^3+3n}$ صعودی است.

۳- اگر $a_n$ و $b_n$ دو دنباله‌ی صعودی باشند، $a_n+b_n$ نیز صعودی است.

به عنوان مثال دو دنباله‌ی $a_n=n$ و $b_n=\frac{-1}{n}$ هر دو صعودی‌اند، پس دنباله‌ی $\left\{n-\frac{1}{n}\right\}$ صعودی‌است.

**دنباله‌های کران‌دار**

معمولا برای بررسی کران‌داری یک دنباله الگوی زیر قابل استفاده است:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\begin{cases} L \rightarrow \text{دنباله همگرا} \rightarrow \text{کران‌دار} \rightarrow \text{از بالا و پایین کران‌دار} \rightarrow \text{مثال}: \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \text{ و } \left\{\frac{n+1}{2n+1}\right\} \\ \infty \rightarrow \text{واگرا} \rightarrow \text{بیکران} \begin{cases} -\infty \rightarrow \text{از بالا کران‌دار} \rightarrow \text{مثال}: \{-\sqrt{n}\} \\ +\infty \rightarrow \text{از پایین کران‌دار} \rightarrow \text{مثال}: \{\sqrt{n}\} \\ \pm\infty \rightarrow \text{از بالا و پایین بیکران} \rightarrow \text{مثال}: \{(-1)^n n\} \end{cases} \\ \text{دو یا چند عدد متمایز} \rightarrow \text{واگرا} \rightarrow \text{کران‌دار} \rightarrow \text{مثال}: \left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\} \\ \text{عددی سرگردان} \rightarrow \text{واگرا} \rightarrow \text{کران‌دار} \rightarrow \text{مثال}: \{\sin n\} \end{cases}$$

با توجه به الگوی بالا در حالتی که $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ باشد، دنباله بیکران است.

➢ **تذکر (۲۳):** همگرایی دنباله شرط کافی برای کران‌داری است.

➢ **تذکر (۲۴):** هر دنباله‌ی یکنوای کران‌دار، همگراست.

در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a$ و قدر نسبت $d$، مجموع $n$ جمله‌ی اول آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad (1)$$

از آنجایی که $a_n = a_1 + (n-1)d$، پس:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad (2)$$

➢ **تذکر (۲۵):** از رابطه‌ی (۱) معمولاً وقتی استفاده می‌کنیم که جمله‌ی عمومی $(a_n)$ داده شده باشد.

■ **مثال:** در دنباله‌ی عددی که جمله‌ی $n$اُم $a_n = 5n - 2$ است، مجموع ده جمله‌ی اول این دنباله را بیابید.

◄ **حل:** $S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) \Rightarrow S_{10} = 5(3+48) = 5(51) = 255$

➢ **تذکر (۲۶):** از رابطه‌ی (۲) معمولاً وقتی استفاده می‌کنیم که $a_1$ و $d$ موجود باشد یا رابطه‌ای بین جملات داده شده باشد.

■ **مثال:** جملات چهارم و شانزدهم از یک دنباله‌ی حسابی به‌ترتیب ۱ و ۲۵ است، مجموع ده جمله‌ی اول آن را بیابید.

◄ **حل:**

$$\begin{cases} a_4 = 1 \\ a_{16} = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = 1 \\ a_1 + 15d = 25 \end{cases} \Rightarrow d = 2 \ , \ a_1 = -5 \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) \Rightarrow S_{10} = 5(-10+18) = 40$$

➢ **تذکر (۲۷):** در یک دنباله‌ی حسابی، برای یافتن تعداد جملاتی که مجموع آن‌ها برابر مقدار معینی می‌شود، کافی است معادله‌ی $S_n$ را برحسب $n$ (یک معادله‌ی درجه‌ی دوم) حل کنیم و $n$ را بیابیم. ($a_1$ و $d$ باید معلوم باشند.)

■ **مثال:** مجموع چند جمله‌ی دنباله‌ی $\dots , 9 , 12 , 15$ برابر صفر است؟

◄ **حل:** $a_1 = 15 \ , \ d = -3 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(15) + (n-1)(-3)) = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(33 - 3n) = 0 \Rightarrow n = 11$

بدیهی است $n = 0$ غیر قابل قبول است.

➢ **تذکر (۲۸):** اگر مجموع $n$ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی $S_n$ داده شده باشد آنگاه جمله‌ی عمومی از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{aligned} \longrightarrow \boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$$



### مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی

در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a$ و قدر نسبت $q$، مجموع $n$ جمله‌ی اول آن، یعنی:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} \quad , \quad q \neq 1$$

برابر است با:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \quad , \quad q \neq 1$$

■ **مثال:** حاصل $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$ را به‌ازای $x = \sqrt{3}$ بیابید.

◄ **حل:** مجموع فوق، مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a = x$ و قدر نسبت $q = \frac{x^2}{x} = x$ است و تعداد جملات آن ۱۰ تاست.

پس:

$$S_{10} = \frac{x(1-x^{10})}{1-x} = \frac{\sqrt{3}[1-(\sqrt{3})^{10}]}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-3^5)}{1-\sqrt{3}}$$

➢ **تذکر (۲۹):** در یک دنباله‌ی هندسی، رابطه‌ی بین مجموع $2n$ جمله‌ی اول یعنی $S_{2n}$ و مجموع $n$ جمله‌ی اول یعنی $S_n$ به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n}$$

**اثبات:** $S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ و $S_{2n}=\frac{a(1-q^{2n})}{1-q}$، با تقسیم و استفاده از اتحاد مزدوج به جواب می‌رسیم.

■ **مثال:** در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $q=2$، مجموع شش جمله‌ی اول، چند برابر مجموع سه جمله‌ی اول است؟

◀ **حل:** $\frac{S_6}{S_3}=1+q^3 \to \frac{S_6}{S_3}=1+2^3=9$

**حد مجموع جمله‌های یک دنباله‌ی هندسی**

اگر $|q|<1$، مجموع همه‌ی جمله‌های دنباله‌ی هندسی $\{aq^{n-1}\}$ که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+...$

برابر است با:

$S=\frac{a}{1-q}$

در آن $a$ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی و $q$ قدر نسبت آن است.

اثبات: اگر $|q|<1$ باشد، آنگاه:

$S=a+aq+aq^2+aq^3+...$

$S=a+q(a+aq+aq^2+...)$

$S=a+qS \Rightarrow S-qS=a$

$\Rightarrow S=\frac{a}{1-q}$

**توجه ۱:** در تست‌های کنکور سال‌های گذشته به‌جای «مجموع همه‌ی جملات» از «حد مجموع» استفاده شده است.

■ **مثال:** حد مجموع $...+\frac{2}{5^n}+...+\frac{2}{125}+\frac{2}{25}+\frac{2}{5}+2$ را بیابید.

◀ **حل:** با استفاده از فرمول بالا، از آنجایی که $a_n=\frac{2}{5^{n-1}}$ است، پس $a=2$ و $q=\frac{1}{5}$ می‌باشد، پس:

$S=\frac{a}{1-q} \Rightarrow S=\frac{2}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}$

**کسر مولد اعداد اعشاری ساده و متناوب**

**۱** عدد $0/aa...a...$ را یک عدد اعشاری متناوب ساده می‌نامیم و به اختصار به‌صورت $0/\overline{a}$ نمایش می‌دهیم، اگر بخواهیم کسر مولد این عدد اعشاری را بیابیم، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$0/\overline{a}=0/aa...a...=\frac{a}{10^1}+\frac{a}{10^2}+\frac{a}{10^3}+...$

که مجموع یک دنباله‌ی هندسی است با جمله‌ی اول $\frac{a}{10}$ و قدر نسبت $\frac{1}{10}$، پس:

$$0/\overline{a}=\frac{\frac{a}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{a}{9}$$

به‌طور کلی:

$$\boxed{0/\overline{D}=\frac{D}{\text{به تعداد دور گردش ۹}}}$$

به عنوان مثال: $0/\overline{12}=\frac{12}{99}$ و $0/\overline{153}=\frac{153}{999}$.

یک روش دیگر یافتن کسر مولد عدد $0/\overline{a}$، فرض کنیم $0/\overline{a}=A$، طرفین رابطه را در ۱۰ ضرب می‌کنیم، لذا داریم:

$$\begin{cases} a/\overline{a}=10A & (1)\\ 0/\overline{a}=A & (2)\end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} a=10A-A \Rightarrow A=\frac{a}{9}$$

**۲** عدد $0/abbb...b...$ را یک عدد اعشاری متناوب مرکب می‌نامیم و به اختصار به‌صورت $0/a\overline{b}$ نمایش می‌دهیم، بنابراین:

دنباله‌ی روبرو یک دنباله با جمله‌ی اول $\frac{b}{100}$ و قدر نسبت $\frac{1}{10}$ است، پس:

$$0/a\overline{b}=\frac{a}{10^1}+\underbrace{\frac{b}{10^2}+\frac{b}{10^3}+...}_{(1)}=\frac{a}{10}+\frac{\frac{b}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{a}{10}+\frac{b}{90}$$

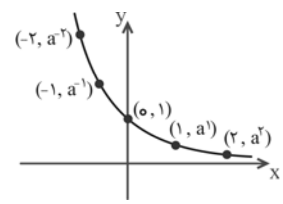
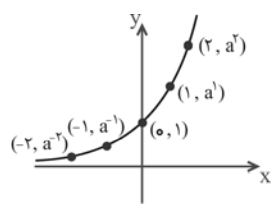
$$\boxed{0/L\overline{D}=\frac{LD-L}{\text{به تعداد دور گردش ۹ و به تعداد عدد ثابت صفر}}}$$

## توابع نمایی و لگاریتمی
- تعریف توابع نمایی
- نمودار توابع نمایی

**تعریف:** تابع نمایی به پایه‌ی $a$ به‌صورت $f(x)=a^x$ تعریف می‌شود که $a>0$ و $a\neq 1$ و $x$ یک عدد حقیقی است.

دقت کنید که شرط $a\neq 1$ به این دلیل است که $f(x)=1^x=1$، یک تابع ثابت است.

### نمودار توابع نمایی

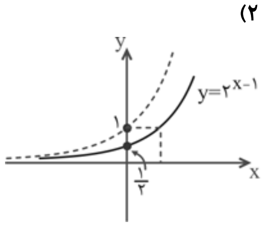
| | نمودار $y=a^x$ | |
|---|---|---|
| | اگر $0<a<1$ باشد | اگر $a>1$ باشد |
| نمودار |   $f(x)=a^x \quad , \quad 0<a<1$ |   $f(x)=a^x \quad , \quad a>1$ |
| دامنه | $R=$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی | $R=$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی |
| برد | بازه‌ی $(0, +\infty)$ | بازه‌ی $(0, +\infty)$ |
| خاصیت | با افزایش $x$ از چپ به راست، $y$ کاهش می‌یابد.<br>تابع یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است. | با افزایش $x$ از چپ به راست، $y$ افزایش می‌یابد.<br>تابع یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است. |

➢ **تذکر (۳۰):** با استفاده از خواص انتقال، می‌توانیم نمودار بعضی از توابع نمایی را رسم کنیم.

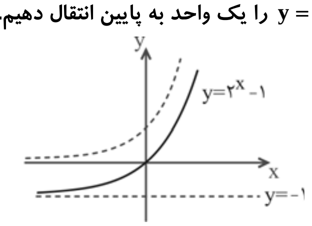
■ **مثال:** نمودار توابع $y=2^{x-1}$ و $y=2^x-1$ را رسم کنید.

◀ **حل:** برای رسم نمودار تابع $y=2^{x-1}$ کافی است نمودار تابع $y=2^x$ را یک واحد به راست انتقال دهیم. (شکل ۱)

همچنین برای رسم تابع $y=2^x-1$، کافی است نمودار تابع $y=2^x$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم. (شکل ۲)



(شکل ۱)



(شکل ۲)

**توجه:** عدد $e$ را عدد نپر می‌نامیم، می‌توان ثابت کرد که $e\approx 2/71$، پس نمودار تابع $y=e^x$ شبیه نمودار تابع $y=a^x$ در حالت $a>1$ است.

## توابع نمایی و لگاریتمی
- تعریف و نمودار توابع لگاریتمی

**تعریف:** اگر $a$ عددی مثبت و $a\neq 1$ باشد، تابع لگاریتمی به پایه‌ی $a$ با نماد $\log_a$ نمایش داده می‌شود و داریم:

$\log_a^x=y \Leftrightarrow a^y=x$

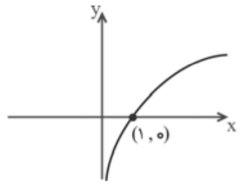
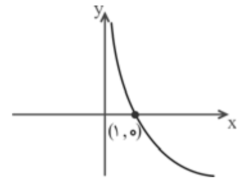
➢ **تذکر (۳۱):** به دو خاصیت زیر توجه کنید:

(۱) $\log_a^1=0$ (۲) $\log_a^a=1 \quad (a>0 \ , \ a\neq 1)$

**توجه:** $\log_e^x$ را لگاریتم طبیعی می نامیم و با نماد $\operatorname{Ln} x$ نمایش می دهیم.

### نمودار تابع لگاریتمی

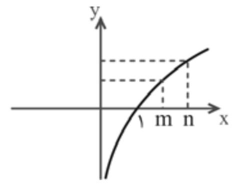
| $y=\log_a^x \ , \ 0<a<1$ | $y=\log_a^x \ , \ a>1$ |
|---|---|

| | | نمودار |
|---|---|---|
| <br> | <br> | نمودار |

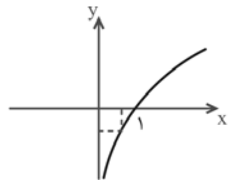
### نامساوی‌های لگاریتمی

با توجه به نمودار تابع‌های $y = \log_a x$ در دو حالت $۰ < a < ۱$ و $a > ۱$، می‌توان درستی نامساوی‌های زیر را دید:

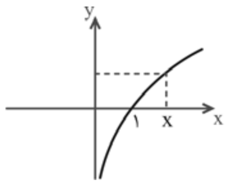
الف ــ اگر $a > ۱$ باشد، آنگاه:




③ $۰ < m < n \Rightarrow \log_a m < \log_a n$

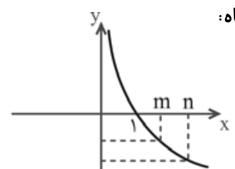



② $۰ < x < ۱ \Rightarrow \log_a x < ۰$

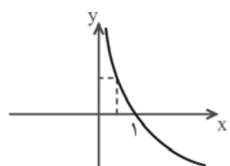



① $x > ۱ \Rightarrow \log_a x > ۰$

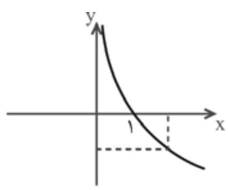
ب ــ اگر $۰ < a < ۱$ باشد، آنگاه:




③ $۰ < m < n \Rightarrow \log_a m > \log_a n$




② $۰ < x < ۱ \Rightarrow \log_a x > ۰$




① $x > ۱ \Rightarrow \log_a x < ۰$

## توابع نمایی و لگاریتمی — قوانین لگاریتم

در این بخش خواص و قوانینی را در لگاریتم می‌بینیم، این خواص به ما در محاسبات لگاریتم و حل معادلات آن‌ها کمک می‌نماید.

اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد و n عددی حقیقی و A و B اعداد مثبت باشند، آنگاه:

① $\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B$ (قانون ضرب)

② $\log_a (\frac{A}{B}) = \log_a A - \log_a B$ (قانون تقسیم)

③ $\log_a A^n = n \log_a A$ (قانون توانی)

■ **مثال:** اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$ آنگاه مطلوبست:

◀ **حل:**

(۱) $\log ۶$

طبق قانون ①

$\log ۶ = \log ۲ \times ۳ = \log ۲ + \log ۳ = a + b$

(۲) $\log ۵$

طبق قانون ②

$\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - a$

(۳) $\log ۸$

طبق قانون ③

$\log ۸ = \log ۲^۳ = ۳ \log ۲ = ۳a$

➢ **تذکر (۳۲):** توجه کنید وقتی پایه‌ی لگاریتم نوشته نمی‌شود، یعنی پایه‌ی آن (۱۰) است.

➢ **تذکر (۳۳):** دقت کنید که $\log(x+y) \neq \log x + \log y$ و $\log \frac{x}{y} \neq \frac{\log x}{\log y}$.

➢ **تذکر (۳۴):** قانون توانی را می‌توان تعمیم داد و قانون زیر را نتیجه گرفت:

④ $\boxed{\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m} \log_a A}$

■ **مثال:** حاصل $\log_{۸۱} \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ را بیابید.

◀ **حل:**

$$\log_{3^4}(\sqrt{3})^{-1}=\log_{3^4}3^{\frac{-1}{2}}=\frac{\frac{-1}{2}}{4}\log_3 3=\frac{-1}{8}$$

**قوانین تغییر مبنا**

در خیلی از موارد، نیاز داریم که پایه‌ی لگاریتم را با عدد دیگری، غیر از عدد داده شده بیان کنیم، برای این منظور از قانون تغییر مبنا استفاده می‌کنیم.

■ **مثال:** اگر $\log 5=a$ ، آنگاه $\log_5 2$ را برحسب $a$ بیابید.

اگر $a>0$ ، $b>0$ و $c>0$ و $b\,,c\neq 1$ آنگاه:

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (5)$$

◀ **حل:**

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$$

$$\Rightarrow a=1-\log 2 \Rightarrow \log 2=1-a$$

با توجه به قانون تغییر مبنا:

$$\log_5 2=\frac{\log 2}{\log 5}=\frac{1-a}{a}$$

➢ **تذکر (۳۵):** با توجه به قانون تغییر مبنا می‌توانیم روابط زیر را بیابیم:

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b} \quad (6)$$

$$\log_b a\times\log_c b\times\log_d c=\log_d a \quad (7)$$

■ **مثال:** اگر $\log_{20}4=a$ باشد، $\log_4 5$ را برحسب $a$ بیابید.

◀ **حل:**

$$\log_{20}4=a \rightarrow \log_4 20=\frac{1}{a}\rightarrow \log_4 4\times5=\log_4 4+\log_4 5=\frac{1}{a}\rightarrow 1+\log_4 5=\frac{1}{a}\rightarrow \log_4 5=\frac{1}{a}-1$$

**قوانین نمایی**

با توجه به رابطه‌ی $\log_a x=y$ داریم، $x=a^y$ ، با قرار دادن به جای $y$ در این رابطه‌ی توانی داریم $x=a^{\log_a x}$ ، بنابراین قانون زیر را خواهیم داشت:

■ **مثال:** حاصل $\sqrt{5}^{\log_5 6}$ را بیابید.

اگر $a>0$ و $a\neq 1$ ، آنگاه:

$$a^{\log_a n}=n \quad (8)$$

که در آن $n>0$ است.

◀ **حل:** ابتدا باید پایه‌ها را یکی کنیم لذا:

$$5^{\frac{1}{2}\log_5 6}=5^{\log_5\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

➢ **تذکر (۳۶):** با توجه به قانون نمایی می‌توان قانون زیر را نتیجه گرفت:

$$a^{\log_c b}=b^{\log_c a} \quad (9)$$

**توابع نمایی و لگاریتمی** — معادلات نمایی و لگاریتمی

## معادلات نمایی

در حل معادلات نمایی به حالت‌هایی برمی‌خوریم که دو حالت آن در زیر بررسی می‌شود. در حد برنامه‌ی کتاب درسی دبیرستان ما با معادلات نمایی به شکل کلی $a^{f(x)}=b$ و یا $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ رو به رو هستیم. برای حل این گونه معادلات روش های زیر را خواهیم داشت:

**(۱) اگر بتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم**

حل این نوع معادلات بر این موضوع استوار است که اگر پایه‌ها برابر باشند، آنگاه نماها با هم برابر خواهند بود.

■ **مثال:** معادله‌ی $27^{2x}=9^{5x-1}$ را حل کنید.

◀ **حل:** $(3^3)^{2x}=(3^2)^{5x-1}\Rightarrow 3^{6x}=3^{10x-2}\Rightarrow 6x=10x-2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

**(۲) اگر نتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم**

برای حل معادله‌ی $a^{f(x)}=b$ ، اگر نتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم، از دو طرف معادله در پایه‌ی $a$ لگاریتم می‌گیریم.

■ **مثال:** معادله‌ی $۵^x = ۴$ را حل کنید.

◀ **حل:** $۵^x = ۴ \xrightarrow{\text{از طرفین در پایه‌ی ۵ لگاریتم می‌گیریم}} \log_۵ ۵^x = \log_۵ ۴ \Rightarrow x\log_۵ ۵ = \log_۵ ۴ \Rightarrow x = \log_۵ ۴$

**(۳) معادلاتی که با تغییر متغیر حل می‌شوند**

در این حالت برای حل معادله‌ی $f(a^{u(x)}) = ۰$، معمولاً قرار می‌دهیم $a^{u(x)} = y$ و معادله‌ی $f(y) = ۰$ را نسبت به $y$ حل می‌کنیم و سپس مقادیری که برای $y$ پیدا شده است را در $a^{u(x)} = y$ قرار می‌دهیم و $x$ را پیدا می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله‌ی $۴۹^x + ۷^x - ۲ = ۰$ را حل کنید.

◀ **حل:** $(۷^۲)^x + ۷^x - ۲ = ۰ \Rightarrow ۷^{۲x} + ۷^x - ۲ = ۰$

با فرض $۷^x = y > ۰$، به معادله‌ی $y^۲ + y - ۲ = ۰$ می‌رسیم که جواب‌های آن $y = ۱$ و $y = -۲$ است که فقط $y = ۱$ قابل قبول است و از آنجا $۷^x = ۱$ و $x = ۰$.

**معادلات لگاریتمی**

منظور از حل یک معادله‌ی لگاریتمی، یافتن مقدار یا مقدارهایی برای $x$ است که در معادله صدق می‌کند.

در حل معادلات لگاریتمی به نکات زیر توجه می‌کنیم:

(۱) دامنه‌ی متغیر معادله را می‌یابیم.

(۲) اگر از خواص و ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنید، ممکن است جواب خارجی ظاهر شود باید این جواب با توجه به دامنه‌ی تعریف معادله، از مجموعه جواب‌ها کسر گردد.

در حل معادلات لگاریتمی به حالت‌های زیر برمی‌خوریم:

**(۱) معادلاتی به شکل کلی $\log_a^{f(x)} = b$ :**

برای حل این‌گونه معادلات با استفاده از ارتباط لگاریتم و توان ، به تساوی $f(x) = a^b$ می‌رسیم، این معادله را با توجه به شرایط $f(x) > ۰$، $a > ۰$ و $a \neq ۱$ حل می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله‌ی $\log_۲^{(x^۲-۳)} = ۲$ را حل کنید.

◀ **حل:** اولاً باید $x^۲ - ۳ > ۰$ پس $x > \sqrt{۳}$ یا $x < -\sqrt{۳}$ و از طرفی $x^۲ - ۳ = ۲^۲$ و از آنجا $x^۲ = ۷$، $x = \sqrt{۷}$ و $x = -\sqrt{۷}$ که هر دو قابل قبول‌اند.

**(۲) معادلاتی به شکل کلی $\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)}$ :**

برای حل این‌گونه معادلات از تساوی $f(x) = g(x)$، ریشه‌های معادله را یافته و شرایط $f(x) > ۰$، $g(x) > ۰$، $a > ۰$ و $a \neq ۱$ را بررسی می‌کنیم.

■ **مثال** معادله‌ی $\log^{x^۲-۳} = \log^{۲x}$ را حل کنید.

◀ **حل:** باید $x^۲ - ۳ = ۲x$، با حل معادله‌ی $x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$، ریشه‌های معادله $x = -۱$ و $x = ۳$ خواهند بود، اما $x = -۱$ قابل قبول نیست، زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نشده است.

**(۳) معادلاتی که با استفاده از قوانین لگاریتم به یکی از دو حالت (۱) یا (۲) تبدیل می‌شوند:**

برای حل این‌گونه معادلات با استفاده از قوانین لگاریتم، معادله را به یکی از دو شکل (۱) یا (۲) تبدیل کرده و آن را حل می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله‌ی $\log(x+۱) + \log(x-۱) = ۲$ را حل کنید.

◀ **حل:** با استفاده از قانون $\log AB = \log A + \log B$ داریم:

$$\log(x^۲ - ۱) = ۲ \xrightarrow{\text{نوع (۱)}} x^۲ - ۱ = ۱۰^۲ \to x^۲ = ۱۰۱ \to x = \sqrt{۱۰۱} \text{ و } x = -\sqrt{۱۰۱}$$

که جواب $x = -\sqrt{۱۰۱}$ قابل قبول نیست، زیرا لگاریتم مقادیر منفی قابل تعریف نیست.

**(۴) معادلات لگاریتمی که با تغییر متغیر حل می‌شوند:**

برای حل معادله‌ی $f(\log_a^x) = ۰$، معمولاً قرار می‌دهند $\log_a^x = y$ و معادله‌ی $f(y) = ۰$ را نسبت به $y$ حل می‌کنند و مقادیری را که برای $y$ پیدا شده در معادله‌ی $\log_a^x = y$ قرار می‌دهند و $x$ را می‌یابند.

■ **مثال:** معادله‌ی $\log^۲ x - ۲\log x + ۱ - \log^۲ ۳ = ۰$ را حل کنید.

◀ **حل:** دامنه‌ی تعریف معادله‌ی $(۰, +\infty)$ است، قرار می‌دهیم $\log x = y$، داریم:

$$y^۲ - ۲y + ۱ - \log^۲ ۳ = ۰ \Rightarrow (y-۱)^۲ = \log^۲ ۳ \Rightarrow y - ۱ = \pm\log ۳$$

$$y_1 = ۱ - \log ۳ \quad \text{و} \quad y_2 = ۱ + \log ۳$$

پس:

$$\begin{cases} \log x = ۱ - \log ۳ \Rightarrow \log x = \log \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow x_1 = \frac{۱۰}{۳} \\ \log x = ۱ + \log ۳ \Rightarrow \log x = \log ۳۰ \Rightarrow x_2 = ۳۰ \end{cases}$$

**(۵) معادلاتی که با گرفتن لگاریتم از طرفین حل می‌شوند.**

**این روش در معادلاتی کاربرد دارد که در طرفین معادله، عملیاتی از قبیل توان و ریشه‌گیری صورت گرفته باشد.**

■ **مثال:** معادله‌ی $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = x$ را حل کنید.

◀ **حل:** از طرفین معادله در پایه‌ی ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = \log x \Rightarrow \frac{۱}{۲} \log x^{\log \sqrt{x}} = \log x \Rightarrow \frac{۱}{۲} \log \sqrt{x} \times \log x = \log x$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\log x\right)(\log x) = \log x \Rightarrow \frac{۱}{۴}\log^2 x - \log x = ۰ \Rightarrow \log x\left(\frac{۱}{۴}\log x - ۱\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \log x = ۰ \Rightarrow x_1 = ۱ \\ \log x = ۴ \Rightarrow x_2 = ۱۰^۴ \end{cases}$$

**توابع نمایی و لگاریتمی** — **نامعادلات نمایی و لگاریتمی**

**نامعادلات نمایی:** برای حل نامعادلات نمایی ، ابتدا سعی می‌کنیم پایه‌ها را برابر کنیم ، سپس اگرپایه بزرگتر از ۱ بود در برداشتن پایه‌ها جهت نامساوی عوض نمی‌شود و اگر پایه بین صفرو یک بود، در برداشتن پایه‌ها جهت نامساوی عوض می‌شود.

■ **مثال:** نامعادلات زیر را حل کنید:

(a) $۳۲^{-۲x} < \frac{۱}{۸}$ (b) $(\sqrt{۳} - ۱)^{x^2} \geq (\sqrt{۳} - ۱)^{x}$

◀ **حل:**

(a) $۳۲^{-۲x} < \frac{۱}{۸} \Rightarrow (۲^۵)^{-۲x} < ۲^{-۳} \Rightarrow ۲^{-۱۰x} < ۲^{-۳} \Rightarrow -۱۰x < -۳ \Rightarrow x > \frac{۳}{۱۰}$

(b) از آنجایی‌که $۰ < \sqrt{۳} - ۱ < ۱$، پس با برداشتن پایه‌ها، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$x^2 \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۱$$

**نامعادلات لگاریتمی:** برای حل نامعادلات لگاریتمی به روش زیر عمل می‌کنیم:

**الف – دامنه‌ی متغیر نامعادله را می‌یابیم.**

**ب – اگر پایه (a) بزرگتر از یک باشد جهت نامساوی در برداشتن لگاریتم یا تبدیل آن به توان عوض نمی‌شود (تابع صعودی است) اگر پایه (a) بین صفر و یک باشد جهت نامساوی در برداشتن لگاریتم یا تبدیل آن به توان عوض می‌شود (تابع نزولی است).**

■ **مثال:** نامعادلات زیر را حل کنید:

(a) $\log(۵ - ۳x) < ۰$ (b) $\log_{۰/۱}^{(۲x-۳)} > \log_{۰/۱}^{(x+۱)}$

◀ **حل:** (a) دامنه‌ی متغیر نامعادله‌ی $۰ < ۵ - ۳x$ یا $x < \frac{۵}{۳}$ است، از طرفی پایه‌ی لگاریتم بزرگتر از یک است، پس در تبدیل لگاریتم به توان جهت نامساوی عوض نمی‌شود. $\log(۵ - ۳x) < ۰ \Rightarrow ۵ - ۳x < ۱۰^۰ \Rightarrow ۵ - ۳x < ۱ \Rightarrow x > \frac{۴}{۳}$

از اشتراک $x > \frac{۴}{۳}$ و $x < \frac{۵}{۳}$، مجموعه جواب نامعادله $\frac{۴}{۳} < x < \frac{۵}{۳}$ است.

(b) ابتدا دامنه‌ی متغیر معادله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} ۲x - ۳ > ۰ \to x > \frac{۳}{۲} \\ x + ۱ > ۰ \to x > -۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > \frac{۳}{۲} \qquad (۱)$$

از طرفی پایه کوچکتر از یک است، پس در برداشتن لگاریتم‌ها از طرفین جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$۲x - ۳ < x + ۱ \to x < ۴ \qquad (۲)$$

از اشتراک (۱) و (۲)، مجموعه جواب نامعادله $\left\{x : \frac{۳}{۲} < x < ۴\right\}$ است.

## توابع نمایی و لگاریتمی

### e در پدیده‌های طبیعی (تابع رشد و زوال)

**عدد e**

می‌توان ثابت کرد که $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و به طورکلی خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{k}{an+b}\right)^{cn+d}=e^{\frac{ck}{a}}$$

**تابع رشد و زوال**

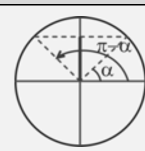
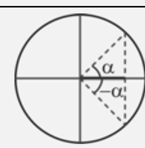
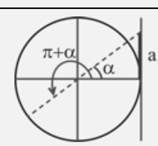
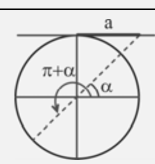
> **تعریف:** تابع با ضابطه‌ی $p(t)=p(0)e^{kt}$ را تابع نمایی رشد با نسبت افزایش $k$ برای $(k>0)$ و تابع نمایی زوال با نسبت کاهش $k$ برای $(k<0)$ می‌نامیم، در این تابع $p(0)$ مقدار اولیه در $t=0$ است:
>
> الف- اگر $(k>0)$ تابع اکیداً صعودی است.
>
> ب- اگر $(k<0)$ تابع اکیداً نزولی است.

## معادلات مثلثاتی

**معادلات اصلی**

منظور از حل یک معادله‌ی مثلثاتی آن است که پس از محاسبات جبری، معادله را به یکی از شکل‌های اصلی $\sin x=\sin\alpha$، $\cos x=\cos\alpha$، $\tan x=\tan\alpha$ و $\cot x=\cot\alpha$ تبدیل کنیم و کلیه‌ی جواب‌های آن‌ها را بیابیم.

➢ **تذکر (۳۷):** در جدول زیر جواب‌های کلی معادلات فوق بیان شده است:

| شکل معادله | جواب کلی $(k\in Z)$ | جواب روی دایره‌ی مثلثاتی | حالت‌های خاص $(k\in Z)$ |
|---|---|---|---|
| $\sin x=a=\sin\alpha$<br>$-1\le a\le 1$ | $\begin{cases}x=2k\pi+\alpha\\x=2k\pi+\pi-\alpha\end{cases}$ |  | $\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$<br>$\sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$<br>$\sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ |
| $\cos x=a=\cos\alpha$<br>$-1\le a\le 1$ | $x=2k\pi\pm\alpha$ |  | $\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$<br>$\cos x=1\Rightarrow x=2k\pi$<br>$\cos x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\pi$ |
| $\tan x=a=\tan\alpha$ | $x=k\pi+\alpha$ |  | $\tan x=0\Rightarrow x=k\pi$ |
| $\cot x=a=\cot\alpha$ | $x=k\pi+\alpha$ |  | $\cot x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ |

■ **مثال:** معادله‌ی $\sin x=\frac{1}{2}$ را حل کنید.

◀ **حل:** از آنجایی‌که $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$، پس معادله‌ی $\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$ را خواهیم داشت و جواب‌های آن $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}$ خواهد بود.

➢ **تذکر (۳۸):** در معادلات بالا می‌توانیم به‌جای $x$، کمان دلخواه $\beta$ را داشته باشیم.

■ **مثال:** جواب کلی معادله‌ی $\cos 4x=\cos x$ را بیابید.

◀ حل:

$$4x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{3} \\ 4x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

➢ **تذکر (۳۹):** در معادلاتی به شکل کلی $\sin\alpha = \cos\beta$ یا $\tan\alpha = \cot\beta$ با استفاده از فرمول‌های تبدیل $\frac{\pi}{2} - \alpha$، دو طرف را به دو نسبت مثلثاتی هم‌نام تبدیل می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله‌ی $\cos 3x = \sin x$ را حل کنید.

◀ حل:

$$\cos 3x = \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x)$$

➢ **تذکر (۴۰):** وقتی تعداد جواب‌های یک معادله را در یک بازه می‌خواهند، ابتدا جواب کلی معادله را یافته و سپس به ازای مقادیر صحیح $k \in Z$ $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ جواب‌های قابل قبول معادله را می‌یابیم.

■ **مثال:** معادله‌ی $\tan 2x = 1$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ چند ریشه دارد؟

◀ **حل:** از آنجایی که $\tan\frac{\pi}{4} = 1$، پس $\tan 2x = \tan\frac{\pi}{4}$، لذا $2x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ و از آنجا، جواب کلی معادله، $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ خواهد بود. جدول زیر جواب‌های قابل قبول را در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ نشان می‌دهد.

| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| x | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ | $\pi+\frac{\pi}{8}$ | $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ |

## حل معادلات مثلثاتی با فاکتورگیری و تجزیه

فاکتورگیری یکی از روش‌های حل معادلات است، در حل بعضی از معادله‌های مثلثاتی، از خاصیت جبری زیر می‌توان استفاده کرد.

$AB = 0 \rightarrow A = 0$ یا $B = 0$

■ **مثال:** جواب‌های کلی معادله‌ی $\cos x . \cos 2x = 0$ را بیابید.

◀ **حل:** با استفاده از خاصیت جبری بالا باید $\cos x = 0$ یا $\cos 2x = 0$ باشد، پس:

$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

➢ **تذکر (۴۱):** با استفاده از روش‌های حل معادلات (اتحاد یک جمله مشترک) می‌توان بعضی از معادلات از درجه‌ی دوم مثلثاتی را حل نمود.

■ **مثال:** معادله‌ی $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$ را حل کنید.

◀ **حل:** سمت چپ را به حاصلضرب دو عامل تبدیل می‌کنیم:

$(2\cos x - 1)(\cos x - 3) = 0 \rightarrow 2\cos x - 1 = 0$ یا $\cos x - 3 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ یا $\cos x = 3$ (ریشه ندارد)

جواب‌های معادله‌ی $\cos x = \frac{1}{2}$ برابر است با $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

➢ **تذکر (۴۲):** با انتخاب مجهول کمکی مناسب می‌توان جواب کلی بعضی از معادلات را یافت.

به عنوان مثال برای حل معادله‌ی $a\tan x + b\cot x = c$، با تبدیل $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ و جای‌گذاری در معادله خواهیم داشت:

$$a\tan x + \frac{b}{\tan x} = c \Rightarrow a\tan^2 x - c\tan x + b = 0$$

شرط وجود جواب برای این معادله آن است که $\Delta = c^2 - 4ab \geq 0$ باشد.

## حل معادلات مثلثاتی با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

در حل بعضی از معادلات مثلثاتی می‌توانیم با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، معادله را به یک معادله‌ی اصلی تبدیل کرده و سپس حل کنیم.

■ **مثال:** معادله‌ی $\cos 4x \cos x + \sin x \sin 4x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

◀ **حل:** با استفاده از فرمول $\cos(\alpha - \beta)$ داریم:

$$\cos(4x - x) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$$

## حل معادلات مثلثاتی و حدود تغییرات نسبت‌ها

در حل بعضی از معادلات مثلثاتی با استفاده از حدود تغییرات نسبت‌های مثلثاتی و استفاده از نامساوی‌های مثلثاتی می‌توان در تعداد ریشه‌ها و یا عدم وجود آن‌ها نظر داد.

■ **مثال:** معادله‌ی $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ چند ریشه دارد؟

◀ **حل:** از آنجایی که $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ و $-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$، لذا $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$، پس سمت چپ حداکثر $\sqrt{2}$ خواهد بود و تساوی به ازای هیچ مقدار $x$ برقرار نیست.

➢ **تذکر (۴۳):** در بعضی از معادلات، دو طرف معادله با توجه به حدود تغییرات نسبت مثلثاتی فقط به ازای مقادیری خاص مساوی خواهند بود ، در این حالت اگر معادله به‌صورت جمع چند نسبت مثلثاتی باشد، باید جواب مشترک آن‌ها را در نظر بگیریم.

■ **مثال:** معادله‌ی $5\sin x + 7\sin^2 x = 12$ در بازه‌ی $[0 , 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

◀ **حل:** از آنجایی که $-1 \le \sin x \le 1$، پس سمت چپ زمانی می‌تواند با سمت راست برابر باشد که هر یک از عبارت‌های $\sin x$ و $\sin^2 x$ برابر یک باشند و اشتراک آنها وقتی است که، $\sin x = 1$ باشد، پس جواب قابل قبول فقط $x = \frac{\pi}{2}$ است.